

El efecto de la dependencia entre tiempos de falla  
gamma y logística en la estimación de la  
confiabilidad de un sistema con dos modos de falla

MILTON ALFONSO MARTINEZ NEGRETE

Tesis para optar al título de  
Magister en Ciencias-Estadística

Director

EVA CRISTINA MANOTAS RODRIGUEZ, Ms.C

Profesor asociado

Departamento de Estadística

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Facultad de Ciencias - Escuela de Estadística

10 de enero de 2011

---

## Resumen

La metodología más utilizada en la actualidad, para estimar la función de confiabilidad de un sistema con dos o más modos de falla, es asumir independencia entre los modos de falla, pero este supuesto, es para algunas aplicaciones de las áreas de la medicina y biología especialmente dudoso, debido a las complejas interacciones bioquímicas entre diferentes procesos de enfermedades y condiciones fisiológicas (Crowder, 2001). El objetivo principal de este trabajo es explorar mediante un estudio de simulación, el efecto de asumir independencia en la estimación de la función de confiabilidad, en los casos de dos modos de falla Logísticos y dos modos de falla Gamma. Los resultados nos muestran que cuando la dependencia es ignorada, no hay diferencia significativa entre la función de confiabilidad verdadera y la función de confiabilidad estimada asumiendo independencia.

**Palabras Claves:** Función de Confiabilidad, fallas concurrentes, competing risks, logística bivariada, gamma bivariada, parámetro de dependencia.

## Abstract

The methodology used today, for estimating the function of reliability of a system with two or more modes of fails, is assume independence between the modes of failure, but this assumption, is for some applications in the areas of medicine and Biology especially questionable due to the complex biochemical interactions between different disease processes and physiological conditions (Crowder, 2001). The main objective of this work is explore through a simulation study, the effect of assuming independence in the estimation of the function of reliability, in the case of two logistical failure modes and two Gamma failure modes. the results show that when de dependence is ignored, there are no significant differences between the true reliability function and the estimated reliability function assuming independence.

**Key words:** Reliability function, competing failures, logistic bivariate, gamma bivariate, dependence parameter.

---

## **Dedicatoria.**

Primero a Dios, que me acompaña y me apoya en todos mis proyectos.

A mis padres Hector y Liney, por su comprensión y apoyo.

A mis hermanos Hector, Fabian, Diana y a mi tía Sol, por su cariño y comprensión.

---

## **Agradecimientos**

Quiero dar gracias a mi directora de tesis, Eva Cristina Manotas, por su apoyo y orientación durante la realización de este trabajo.

Agradezco a mis jurados los profesores Sergio Yañez Canal y Mario Cesar Jaramillo, por sus valiosas correcciones y sugerencias, que fueron determinantes en la realización de este trabajo.

Agradezco de manera muy especial a los profesores Carlos Mario Lopera, Juan Carlos Correa y Juan Carlos Salazar, por las valiosas sugerencias, orientaciones y motivaciones que me brindaron durante el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a todos mis profesores y compañeros de la maestría, ya que todos aportaron de manera significativa a mi crecimiento personal y profesional.

---

## Índice general

---

<b>1. Conceptos Básicos</b>	<b>3</b>
1.1. Confiabilidad. . . . .	4
1.1.1. Funciones de distribución del tiempo de falla . . . . .	4
1.1.2. Percentiles de la función de distribución . . . . .	7
1.2. Sistemas y sus tipos . . . . .	8
1.2.1. Sistemas con componentes en serie . . . . .	8
<b>2. Fallas Dependientes</b>	<b>10</b>
2.1. Variables asociadas . . . . .	10
2.1.1. Confiabilidad de sistemas con componentes en serie . . . . .	11
<b>3. Tiempos de Falla con distribución Logística</b>	<b>13</b>
3.1. Tiempos de Falla Logísticos . . . . .	13
3.1.1. Distribución logística bivariada . . . . .	14
3.1.1.1. Teoría de valores extremos . . . . .	14

3.1.2. Metodología y resultados . . . . .	18
<b>4. Tiempos de falla Gamma</b>	<b>28</b>
4.1. Tiempos de falla Gamma . . . . .	29
4.1.1. Distribución Gamma Bivariada de McKay . . . . .	30
4.1.2. Algoritmo para generar los tiempos de falla de la distribución gamma bivariada de McKay . . . . .	31
4.1.3. Metodología y resultados . . . . .	36
<b>5. Ventajas y Desventajas del estimador <math>\hat{S}^*(t)</math></b>	<b>44</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A. Estimación de la función de confiabilidad, para la distribución Gamma Bivariada de McKay</b>	<b>54</b>
<b>B. Cálculo de la función de confiabilidad bajo independencia</b>	<b>56</b>
<b>C. Función de Confiabilidad con parámetros estimados bajo indepen- dencia</b>	<b>58</b>
<b>D. Función de Confiabilidad bajo independencia para la distribución Logística Bivariada de Gumbel</b>	<b>59</b>
<b>E. Programa en R para generar las curvas de contorno teóricas de la distribución Logística Bivariada</b>	<b>61</b>
<b>F. Programa en R para generar las curvas de contorno teóricas de la distribución Gamma Bivariada de McKay</b>	<b>63</b>
<b>G. Programa en R para la gráfica de la función de densidad de la distribución Gamma Bivariada de McKay.</b>	<b>65</b>

H. Programa en R para generar la gráfica de la función de densidad de la distribución Logística Bivariada.	66
I. Programa en R para generar los intervalos de confianza bootstrap de la distribución Logística Bivariada.	67
J. Programa en R para generar los intervalos de confianza bootstrap de la distribución gamma Bivariada.	70
K. Programa en R para multiplicar los parámetros de la distribución Logística Bivariada.	74

---

## Índice de figuras

---

3.1. Diagrama de dispersión de $n=100$ datos simulados de una densidad conjunta logística bivariada con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,99$ , con sus contornos teóricos. . . . .	17
3.2. Diagrama de dispersión de $n=100$ datos simulados de una densidad conjunta logística bivariada con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,01$ , con sus contornos teóricos. . . . .	17
3.3. Diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución logística bivariada. . . . .	19
3.4. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,01$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	20
3.5. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,01$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ .	20
3.6. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,2$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	21
3.7. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,5$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	21



3.8. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,9$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	22
3.9. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,99$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	22
3.10. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$ y $\gamma = 0,5$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	23
3.11. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$ y $\gamma = 0,1$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	23
3.12. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$ y $\gamma = 0,8$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	24
3.13. Diagrama de caja y bigotes para el caso logístico $\mu_1 = \mu_2 = 3$ y $\gamma = 0,9$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$	24
4.1. Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de McKay con parámetros $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$ y $\rho = 0,6$ .	33
4.2. Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de McKay con parámetros $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$ y $\rho = 0,6$ .	33
4.3. Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de McKay con parámetros $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$ y $\rho = 0,7$ .	34
4.4. Diagramas de dispersión de $n = 100$ datos simulados de una densidad conjunta Gamma bivariada de McKay $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$ y $\rho = 0,6$ .	34
4.5. Diagramas de dispersión de $n = 100$ datos simulados de una densidad conjunta Gamma bivariada de McKay $a = 3, p = 0,5, q = 0,5$ y $\rho = 0,7$ .	35
4.6. Diagramas de dispersión de $n = 100$ datos simulados de una densidad conjunta Gamma bivariada de McKay $a = 3, p = 0,5, q = 0,5$ y $\rho = 0,7$ , con sus contornos teóricos.	35

4.7. Diagramas de dispersión de $n = 100$ datos simulados de una densidad conjunta Gamma bivariada de McKay $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$ y $\rho = 0,6$ , con sus contornos teóricos. . . . .	36
4.8. Diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución Gamma bivariada. . . . .	37
4.9. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma $a = 1, q = 0,7, p = 0,483$ y $\rho = 0,7$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . . .	39
4.10. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma $a = 1, q = 0,3, p = 0,125$ y $\rho = 0,2$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . . .	39
4.11. Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma $a = 1, q = 0,7, p = 0,483$ y $\rho = 0,7$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . .	40
4.12. Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma $a = 1, q = 0,3, p = 0,125$ y $\rho = 0,2$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . .	40
4.13. Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma $a = 3, q = 0,5, p = 0,48$ y $\rho = 0,9$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . . .	41
4.14. Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma $a = 3, q = 0,5, p = 0,48$ y $\rho = 0,9$ en los percentiles $t_p$ con $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$ y $0.95$ . . . .	41

---

## Índice de Tablas

---

3.1. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,05})$ para la distribución logística . . .	25
3.2. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,25})$ para la distribución logística . . .	25
3.3. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,5})$ para la distribución logística . . .	26
3.4. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,75})$ para la distribución logística . . .	26
3.5. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	27
4.1. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	42
4.2. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	42
4.3. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	42
4.4. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	42
4.5. Intervalos de confianza para $\hat{S}^*(t_{0,95})$ para la distribución gamma . . .	43
5.1. Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,1$ . . . .	46
5.2. Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,2$ . . . .	46

5.3.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,3$ . . . .	46
5.4.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,4$ . . . .	47
5.5.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,5$ . . . .	47
5.6.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,6$ . . . .	47
5.7.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,7$ . . . .	48
5.8.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,8$ . . . .	48
5.9.	Cambio Porcentual para $S(t)_{(nuevo)}$ y $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ para tiempos de falla logísticos con parámetros $\mu_1 = 3$ , $\mu_2 = 7$ , $\psi_1 = \psi_2 = 1$ y $\rho = 0,9$ . . . .	48

---

## Introducción

---

La forma mas común en la que se estudia la confiabilidad de un sistema de dos o mas componentes, es asumir independencia entre los modos de falla de los componentes. Este supuesto es muy dudoso en muchas aplicaciones, debido a que existen interacciones propias de la naturaleza del sistema que son muy importantes y deben ser tenidas en cuenta, pero que bajo este supuesto de independencia no se tienen en cuenta. En este trabajo se estudia el efecto de la dependencia entre tiempos de falla con distribuciones gamma y logística en la estimación de la confiabilidad de un sistema con dos modos de falla. Se escogen estas distribuciones porque pueden ser aplicadas en muchas situaciones de la vida real, como la modelación de portafolios financieros y la construcción de modelos que permiten predecir una temporada de sequía en una determinada región[11]. El presente estudio tiene como objetivo central, mostrar el efecto de asumir independencia entre los modos de falla, en la estimación de la función de confiabilidad de un sistema con dos modos de falla, donde los tiempos de falla asociados a los modos de falla tienen una distribución Gamma bivariada y Logística bivariada.

Debido a su importancia, este problema ha sido abordado por diferentes autores,

como Manotas et al (2008), Meeker y Escobar (2009), ellos coinciden en que es muy importante, asignar de manera adecuada el nivel de dependencia entre los modos de falla del sistema, y que el efecto en la función de confiabilidad, dependerá de las propiedades de los estimadores y de los escenarios utilizados [9], [3]

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos de la siguiente manera. El capítulo 1 contiene algunas definiciones básicas referentes a confiabilidad, las cuales permitirán la comprensión de la notación que se va a utilizar en el desarrollo de este trabajo. En los capítulos 3 y 4 se presenta la metodología utilizada en este estudio, para la obtención de resultados analíticos. Específicamente el capítulo 2 ilustra sobre la distribución Gamma univariada y bivariada, abordando la metodología necesaria para generar tiempos de falla de la distribución Gamma bivariada de McKay. Mientras que en el capítulo 3 se trabaja la distribución Logística univariada y los tiempos de falla de la distribución Logística bivariada. En el capítulo 5 se muestran las conclusiones del estudio. En los anexos se muestran los programas desarrollados, para este trabajo y los desarrollos analíticos sobre las funciones de confiabilidad bivariada.

# CAPÍTULO 1

---

## Conceptos Básicos

---

Las características que se le exigen a los sistemas son un alto rendimiento, alta confiabilidad, bajo costo y fácil mantenimiento. Esto ha originado la necesidad de estudios detallados sobre los aspectos de confiabilidad, seguridad, mantenimiento de estos sistemas durante la fase de diseño y ciclo de vida del sistema. Para realizar un estudio adecuado de la confiabilidad de un sistema es necesario conocer sus modos de falla y la importancia de cada uno dentro del sistema. A continuación se definen en forma sencilla, algunos términos que serán utilizadas en el desarrollo de los siguientes capítulos.

## 1.1. Confiabilidad.

La confiabilidad se define como la probabilidad de que un sistema o componente de un sistema, desempeñe en forma satisfactoria su función por un período específico de tiempo, bajo una serie de condiciones de operación.[8]

Cuando un sistema o componente, no realiza apropiadamente la función para la que fue diseñado, entonces decimos que presenta una falla. Las fallas de un sistema también pueden clasificarse de dos maneras, de acuerdo a si se repiten o no se repiten, como fallas recurrentes y fallas no recurrentes. En este estudio se trabajará con fallas no recurrentes, es decir una vez el sistema presenta falla, deja de funcionar y no es reparable.

### 1.1.1. Funciones de distribución del tiempo de falla

La variable aleatoria  $T$  representa el tiempo de falla de un sistema y puede estudiarse a través de la función de supervivencia, la función hazard, o la función de distribución acumulada.

#### Función de distribución Acumulada

Supóngase que en un estudio se tienen  $n$  unidades o sistemas y se observan hasta el momento en que se presenta el evento de interés, en este caso la falla; cada unidad o sistema debe tener asociado un tiempo al final del estudio. Este tiempo indica en que momento la unidad o sistema presenta la falla. Estos  $n$  tiempos se llamarán tiempos de supervivencia. Se denota por  $T$  la variable que indica los tiempos de supervivencia, es decir, los lapsos transcurridos desde el tiempo cero hasta la ocurrencia de la falla. Se considera un tiempo  $t$  fijo tal que  $0 < t < T$ . La función de distribución acumulativa de  $T$  (fda) se define como:

$$F(t) = P(T \leq t), t > 0 \quad (1.1)$$



Es la probabilidad de que una unidad o sistema falle antes del tiempo  $t$ . Esta probabilidad puede ser interpretada como la proporción de unidades en una población que fallaran antes del tiempo  $t$ .

### **Función de supervivencia**

La función  $S(t)$  indica la probabilidad de supervivencia más allá del tiempo  $t$ . Esta función se define como:

$$S(t) = P(T > t), t > 0 \quad (1.2)$$

Es el complemento de la fda. Por lo tanto  $F(t) + S(t) = 1$ , para todo  $t$ . Donde  $F(t)$  y  $S(t)$  son funciones creciente y decreciente respectivamente. La función de supervivencia también se llama función de confiabilidad.

### **Función de densidad de probabilidad**

La función de densidad de probabilidad (fdp) para la variable aleatoria continua  $T$  se define como la derivada de  $F(t)$  con respecto a  $t$ :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{-dS(t)}{dt} \quad (1.3)$$

La fdp puede ser utilizada para representar la frecuencia relativa de tiempos de falla como una función del tiempo.

### Función hazard

La función de riesgo, denotada por  $h(t)$ , se define como la probabilidad de que un individuo presente el evento de falla durante un intervalo de tiempo corto  $(t, t + \Delta_t)$ , dado que sobrevivió hasta el tiempo  $t$ .

La función hazard se define como:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (1.4)$$

La anterior ecuación nos define la probabilidad instantánea de falla, condicionado a una supervivencia en un tiempo  $t$ .  $h(t)$  es no negativa, es decir  $h(t) \geq 0$ .

### Función hazard acumulada

La función hazard acumulada se define como:

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds \quad (1.5)$$

Observe que

$$S(t) = P(T > t) = \exp(-H(t)) \quad (1.6)$$

#### 1.1.2. Percentiles de la función de distribución

El percentil  $t_p$  es la inversa de la *fda* evaluada en  $p$ . Por definición la *fda*  $F(t)$  es no decreciente, por tanto:

- Cuando  $F(t)$  es estrictamente creciente hay un único valor  $t_p$  que satisface  $F(t_p) = p$ , y se tiene  $t_p = F^{-1}(p)$
- Cuando  $F(t)$  es constante sobre un intervalo o intervalos,  $t_p$  es el valor mínimo que satisface  $F(t) = p$

En general para  $0 < p < 1$ , el percentil  $p$  de  $F(t)$  es el  $t$  mínimo tal que  $P(T < t) = F(t) \geq p$ .

## 1.2. Sistemas y sus tipos

Un sistema es un dispositivo formado por partes. Estas partes se llaman componentes. La actuación de un sistema puede analizarse en función de componentes individuales. En general el fallo de un sistema se produce al fallar uno o varios componentes. El problema básico de la confiabilidad consiste en el calculo de la función de confiabilidad  $S(t)$  de un sistema a partir de la confiabilidad  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$  de sus componentes. (Devore, 2003) La confiabilidad de un sistema con dos o mas modos de falla, se modela como la confiabilidad de un sistema con dos o mas componentes en serie.

### 1.2.1. Sistemas con componentes en serie

El concepto fundamental de los sistemas es que las componentes se encuentran individualmente en uno de dos estados: funcionan o fallan, y el estado de los sistemas se representa en términos de los estados individuales de cada componente a través de las funciones de estructura. Los tipos de sistemas coherentes mas comunes son: los sistemas en serie, en paralelo o mixtos. A continuación se desarrollaran los conceptos de confiabilidad de sistemas con componentes en serie.

Una estructura en serie con  $s$  componentes funciona si y solo si, todas las componentes funcionan. Para un sistema con dos componentes en serie e independientes, la función acumulada del tiempo de falla del sistema es:

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) \\ &= 1 - P(T > t) \\ &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) \\ &= 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) \\ &= 1 - (1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) \\ &= F_1(t) + F_2(t) - F_1(t)F_2(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde  $T_i$  es el tiempo de vida o de falla asociado a cada una de las componentes, y  $F_i(t)$  es la función acumulada de la componente  $i$ , con  $i = 1, 2$ .

Para  $s$  componentes independientes  $F(t) = 1 - \prod_{i=1}^s (1 - F_i(t))$  y para  $s$  componentes idénticamente distribuidas e independientes ( $F_i(t) = F(t), i = 1, 2, \dots, s$ ),  $F(t) = 1 - (1 - F(t))^s$

Para un sistema en serie de componentes independientes en serie, la función hazard del sistema, es la suma de las funciones hazard de las componentes, esto es:

$$h(t) = \sum_{i=1}^s h_i(t) \quad (1.8)$$

## CAPÍTULO 2

---

### Fallas Dependientes

---

Reciben el nombre de fallas dependientes aquellas que están relacionadas, es decir que una componente de un sistema, influye de alguna manera en la falla de otra componente.

Se pueden establecer dos tipos de dependencia: positiva y negativa. Si la falla de una componente permite un incremento en la tendencia de que la otra componente falle, la dependencia es positiva ahora bien, si se sucede lo contrario, la falla de una componente reduce la tendencia de que la otra componente falle, la dependencia es negativa.

#### 2.1. Variables asociadas

Frecuentemente se utiliza la covarianza entre dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ ,  $Cov(X,Y)$ , para indicar como los valores de  $X$ , se asocian a los valores de  $Y$ .

Con esta medida, son positivamente dependientes, si:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \geq 0 \quad (2.1)$$

Note que covarianza positiva entre X y Y  $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$ , implica correlación positiva ( $\rho$ ) entre X y Y ( $\rho(X, Y) > 0$ ), ya que:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_x^2 = \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ , y  $\sigma_y^2 = \text{Cov}(Y, Y) = \text{Var}(Y)$ .

$\text{Var}(X)$ , se refiere a la varianza de X y  $\text{Var}(Y)$  se refiere a la varianza de Y. El coeficiente de correlación( $\rho$ ) es una medida de asociación lineal entre X y Y.

### 2.1.1. Confiabilidad de sistemas con componentes en serie

Es muy importante conocer las características de la confiabilidad de sistemas con componentes en serie, puesto que la modelación de confiabilidad de sistemas con varios modos de falla, utiliza la forma de la confiabilidad de sistemas con estructuras en serie. Consideremos variables binarias para representar el estado de las componentes del sistema, así:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i \text{ esta funcionando} \\ 0 & \text{si la componente } i \text{ ha fallado } i = 0, 1 \end{cases}$$

La confiabilidad del sistema con dos componentes en serie asociadas positivamente, es mayor o igual a la confiabilidad del sistema con dos componentes en serie independientes. Esto es:

$$P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1) \geq \prod_{i=1}^2 P(X_i = 1) \quad (2.3)$$

La anterior expresión también se puede ver como: La probabilidad de que las dos componentes del sistema en serie, funcionen, es mayor o igual que el producto de las probabilidades de funcionamiento de las dos componentes del sistema. (Esta es la confiabilidad del sistema en serie cuando los dos componentes son independientes)

$$P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1) = E\left(\prod_{i=1}^2 X_i\right) \geq \prod_{i=1}^2 E(X_i) = \prod_{i=1}^2 P(X_i = 1) \quad (2.4)$$

Es decir, si dos componentes de un sistema en serie, están asociados positivamente, entonces la confiabilidad del sistema para este caso, es mas alta, que la confiabilidad del sistema cuando las componentes son independientes. La confiabilidad de un sistema con dos modos de falla y tiempos de falla positivamente dependientes es superior a la confiabilidad de un sistema con dos modos de falla y tiempos de falla independientes.



## CAPÍTULO 3

---

### Tiempos de Falla con distribución Logística

---

En el siguiente capítulo se estudian los tiempos de falla con distribución logística. La distribución logística es de gran importancia, debido a sus muchas aplicaciones en el campo de los estudios epidemiológicos y económicos, donde el investigador necesita, predecir el comportamiento de variables dicotómicas, y también se enfrenta a situaciones relacionadas con la teoría de valores extremos.

#### 3.1. Tiempos de Falla Logísticos

La función de densidad de la distribución logística esta dada por la expresión:

$$f(x \mid \mu, \beta) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{-(x-\mu)/\beta}}{[1 + e^{-(x-\mu)/\beta}]^2} \quad (3.1)$$

donde  $-\infty < x < \infty$ ,  $\beta > 0$  es el parámetro de forma y  $-\infty < \mu < \infty$  es el parámetro

de escala.

La función de distribución acumulada esta dada por la expresión.

$$F(x | \mu, \beta) = \frac{1}{1 + e^{-(x-\mu)/\beta}} \quad (3.2)$$

la forma de la distribución logística es muy similar a la de la distribución normal; la distribución logística tiene colas largas y delgadas y se requiere un gran número de observaciones para determinar si el comportamiento de los datos sigue una distribución normal o logística. la principal diferencia entre las dos distribuciones, es el comportamiento de la función hazard en la cola superior, puesto que en la distribución logística, este se aproxima a  $1/\sigma$  para valores grandes de  $y$  (Meeker y Escobar, 1988).

### 3.1.1. Distribución logística bivariada

#### 3.1.1.1. Teoría de valores extremos

Valores extremos se denomina a los valores inusuales causados por eventos raros, o también pueden definirse como eventos de baja probabilidad pero de alto impacto.

En el análisis clásico de datos, los valores extremos son llamados *outliers*, generalmente, son ignorados en el estudio. Esto significa que los datos son analizados de forma de hacerlos uniformes a los efectos de ajustar un modelo a ellos. Esto imposibilita describir los eventos que no suceden frecuentemente[1].

Las distribuciones de valores extremos generalizados son de la forma:

$$G(x) = \exp \left[ - \left\{ 1 + \xi \frac{x - \mu}{\psi} \right\}_+^{\frac{-1}{\xi}} \right] \quad x = \left\{ 1 + \xi \frac{x - \mu}{\psi} \right\} > 0 \quad (3.3)$$

Con  $x_+ = \max \{x, 0\}$  y  $-\infty < \mu, \xi < \infty, 0 < \psi < \infty$ .

El dominio de las distribuciones para  $\xi < 0$  es  $x > \mu + \frac{\psi}{\xi}$  y para  $\xi > 0$  es  $x < \mu + \frac{\psi}{\xi}$ . El limite de  $\xi \rightarrow 0$  corresponde con el caso de **la distribución de Gumbel**. Cuando  $\xi > 0$  es el caso de la distribución de Frechet y cuando  $\xi < 0$  es el caso de la Weibull.

Una de las distribuciones de valores extremos bivariada mas importante, y mas utilizada es la distribución logística bivariada (Gumbel, 1960), con parámetro  $\gamma$ , en este estudio los tiempos de falla de la distribución Logística bivariada, fueron generados utilizando la librería *evd* (extreme values distributions), del programa R(anexo I). También se construyeron curvas de contorno teóricas, para apreciar que tan confiables eran los datos que generaba esta librería(anexo L). La función de la distribución logística bivariada esta dada por la expresión:

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ - \left( \left[ \left\{ 1 + \xi_1 \frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1} \right\}^{\frac{-1}{\xi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[ \left\{ 1 + \xi_2 \frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2} \right\}^{\frac{-1}{\xi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma} \right\} \quad (3.4)$$

donde  $0 < \gamma \leq 1$ . Este es un caso especial de la distribución logística asimétrica bivariada. La dependencia se obtiene cuando el limite de  $\gamma$  se aproxima a cero y la independencia cuando  $\gamma$  es uno.

Si hacemos tender  $\xi_1 \rightarrow 0$ , y  $\xi_2 \rightarrow 0$ , obtendremos:

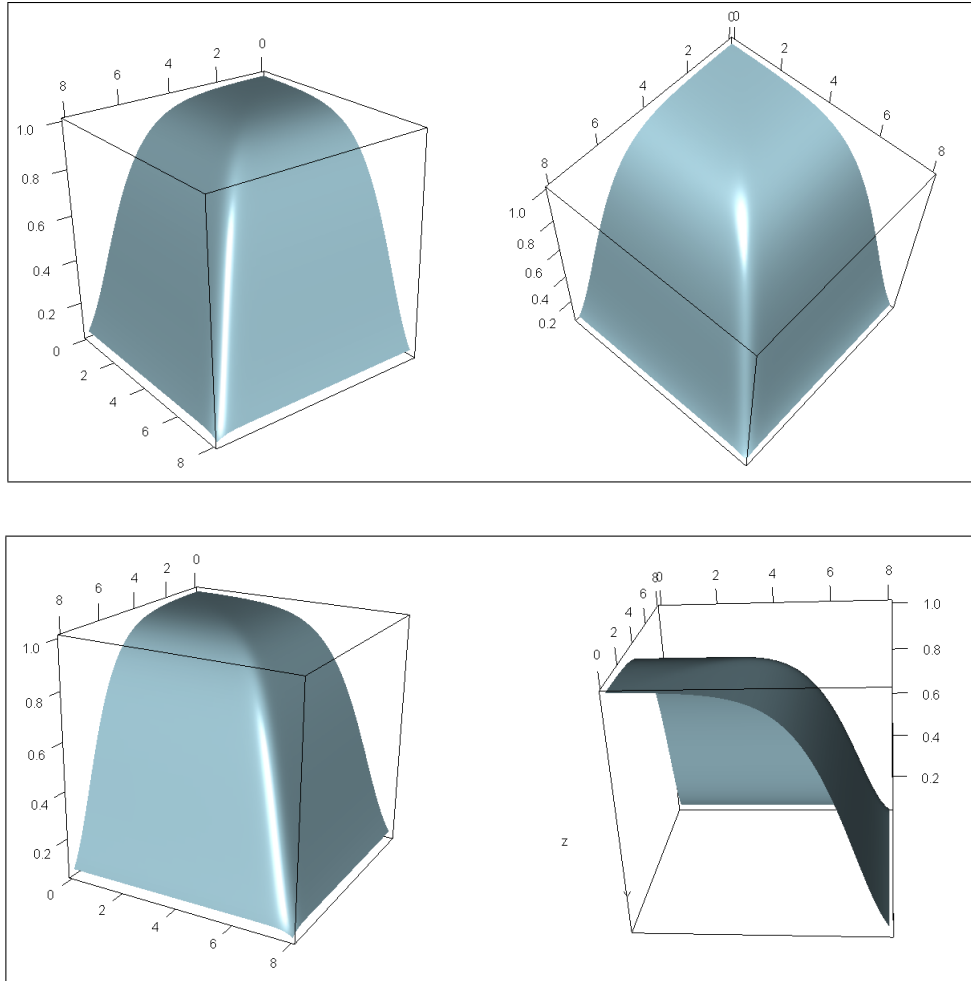
$$G(x, y) = \exp \left\{ - \left( \left[ e^{-\left\{ \frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1} \right\}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[ e^{-\left\{ \frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2} \right\}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma} \right\} \quad (3.5)$$

Para el caso en que  $\gamma$  toma el valor de uno, tenemos independencia, y es el caso en el que  $x_1$  y  $x_2$  tienen distribución de Gumbel:

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ -e^{\left\{ \frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1} \right\}} \right\} \exp \left\{ -e^{\left\{ \frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2} \right\}} \right\} = G(x_1).G(x_2) \quad (3.6)$$

A continuación se muestra la gráfica de la distribución logística bivariada, con parámetros  $\mu_1 = 7, \mu_2 = 7$ , estas gráficas se realizaron usando la librería *rgl* (3D visualization

device system) del software R, y la función `persp3d`, que permite generar gráficos en tres dimensiones y rotarlos en cualquier dirección, el algoritmo utilizado para la construcción de estas gráficas se muestra en el anexo J.



**Gráfico de la distribución logística bivariada con parámetros  $\mu_1 = \mu_2 = 7$**

Los datos de los tiempos de falla de la distribución logística bivariada se simularon utilizando la librería `evd` (Functions for extreme value distributions) del software R, para verificar si los datos provenían de una distribución logística bivariada, se construyeron los contornos de probabilidad de la distribución y se generaron muestras aleatorias de tamaño 100 para observar si los puntos generados con la librería `evd`, se acomodaban a

dicha distribución.[3] Las figuras 4.1 y 4.2, muestran los diagramas de dispersion para las muestras, a los cuales se les superponen los contornos teóricos de probabilidad, las figuras muestran un resultado satisfactorio. Otros gráficos de contorno para diferentes valores de los parámetros se muestran en los anexos.

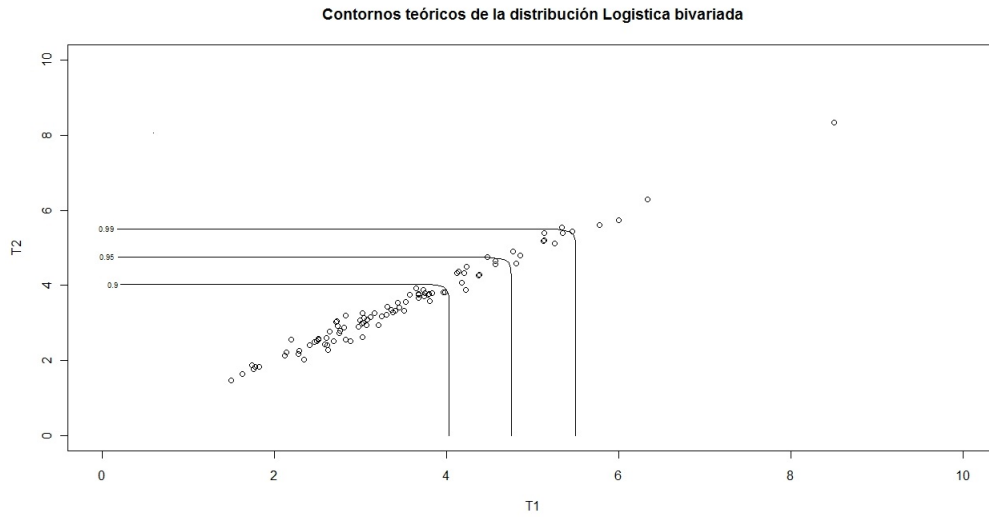


Figura 3.1: Diagrama de dispersión de  $n=100$  datos simulados de una densidad conjunta logística bivariada con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,99$ , con sus contornos teóricos.

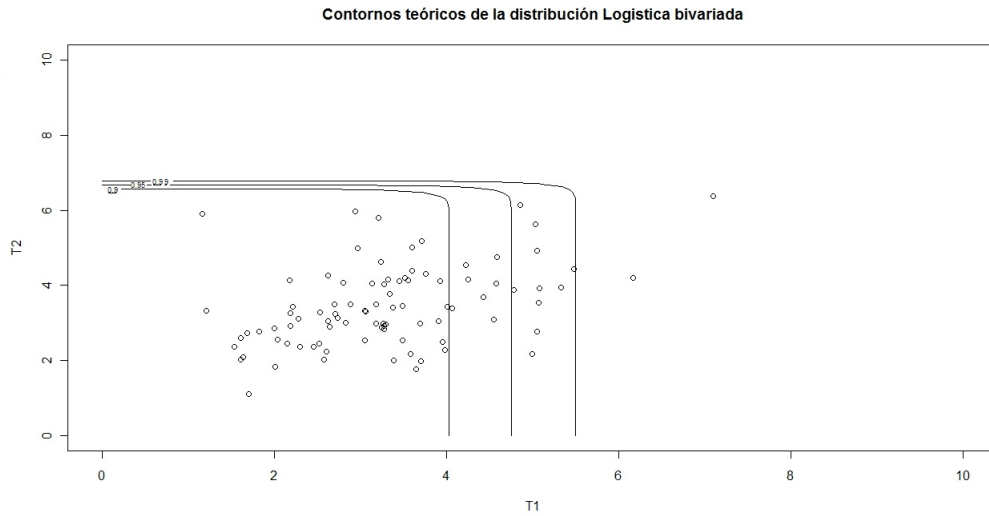


Figura 3.2: Diagrama de dispersión de  $n=100$  datos simulados de una densidad conjunta logística bivariada con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,01$ , con sus contornos teóricos.

### 3.1.2. Metodología y resultados

Para los tiempos de falla de la distribución logística bivariada se estudiaron escenarios, en donde los parámetros de forma de las distribuciones marginales eran iguales;  $\mu_1 = \mu_2 = 3$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 5$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 7$ , también se estudiaron casos en los que los parámetros de forma de las distribuciones marginales son diferentes;  $(\mu_1 = 2, \mu_2 = 5)$ ,  $(\mu_1 = 5, \mu_2 = 7)$ . Para cada uno de los escenarios descritos, se generan 10000 muestras de tamaño  $n = 50$ , de tiempos bivariados de la distribución logística, este tamaño de muestra es apropiado para estudios de confiabilidad, puesto que la información, es siempre difícil conseguir y generalmente resulta demasiado costosa. Para efectos de comparación se obtienen intervalos de confianza bootstrap percentil del 95 % para  $\hat{S}^*(t)$ . Con el fin de comparar los efectos de asumir independencia en estos casos al parámetro de dependencia ( $\gamma$ ) se le dió valores desde 0.1 hasta 0.9. Como ya se había mencionado los valores cercanos a cero indican un mayor grado de dependencia entre las dos variables, por otro lado los valores cercanos a uno, indican menor grado de dependencia. En estos gráficos, para cada uno de los percentiles del tiempo mínimo,  $t(p)$  con  $\rho=0.05, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.95$  se tiene el valor verdadero de  $S(t(p))$ , el limite inferior de  $\hat{S}^*(t)$ , se denota como LI. $\hat{S}^*(t)$  y el limite superior de  $\hat{S}^*(t)$  se denota como LS. $\hat{S}^*(t)$ . La linea continua une los valores de  $S(t(p))$ , la linea discontinua que esta por debajo de la linea continua, une los valores de los limites inferiores de la estimación de  $\hat{S}^*(t(p))$ , y la linea discontinua que esta por encima de la linea continua, une los limites superiores de la estimación de  $\hat{S}^*(t(p))$ . De esta manera se obtienen las bandas de confianza aproximadas[6]. La figura 3,3, muestra el diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución logística bivariada.

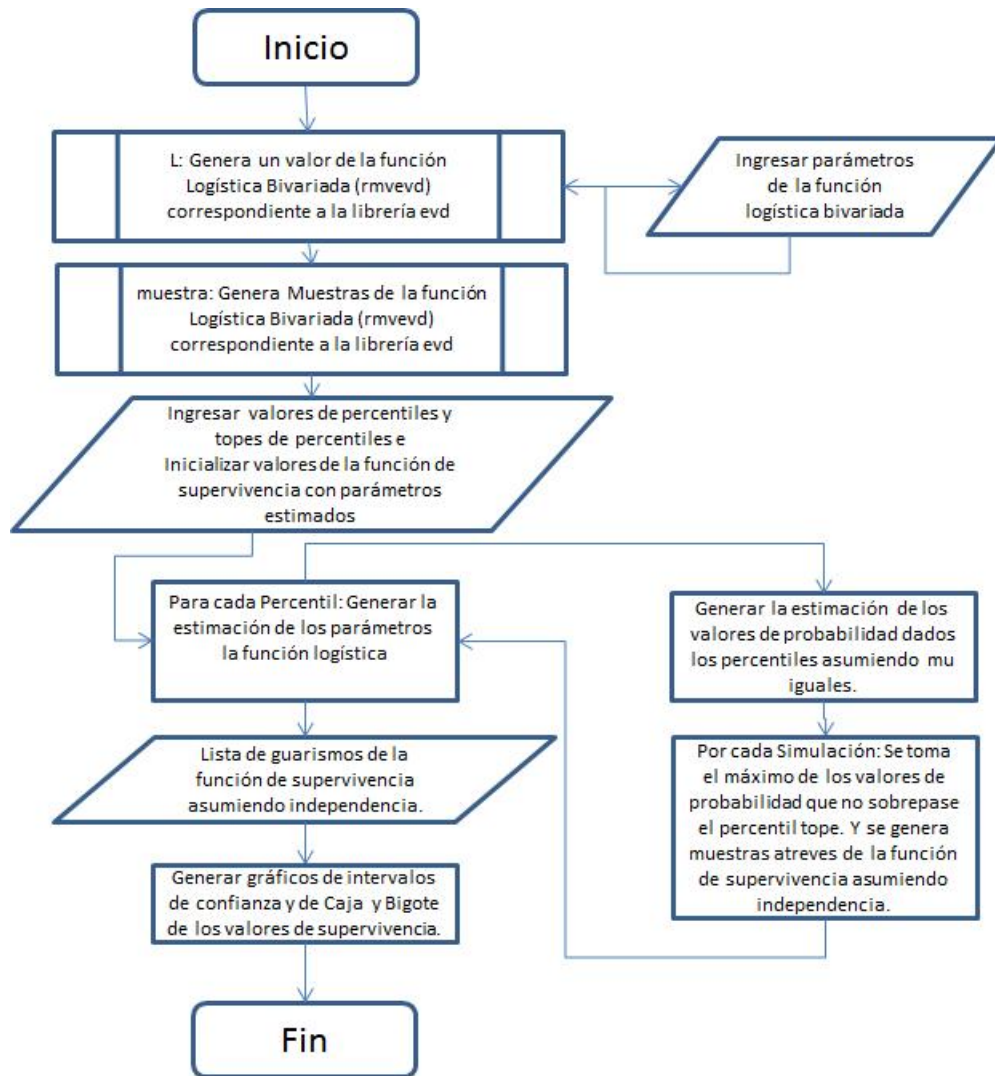


Figura 3.3: Diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución logística biviada.

A continuación se muestra los resultados de la simulaciones.

Los resultados obtenidos con los escenarios donde los parámetros de forma son iguales como los casos  $\mu_1 = \mu_2 = 3$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 5$  y  $\mu_1 = \mu_2 = 7$ , resultan ser similares, de igual modo los escenarios en que los que se plantearon parámetros de forma diferentes tales como  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$  y  $\mu_1 = 5, \mu_2 = 7$  también resultaron ser muy similares, por lo cual en este capítulo se discuten los resultados asociados al caso  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$ .

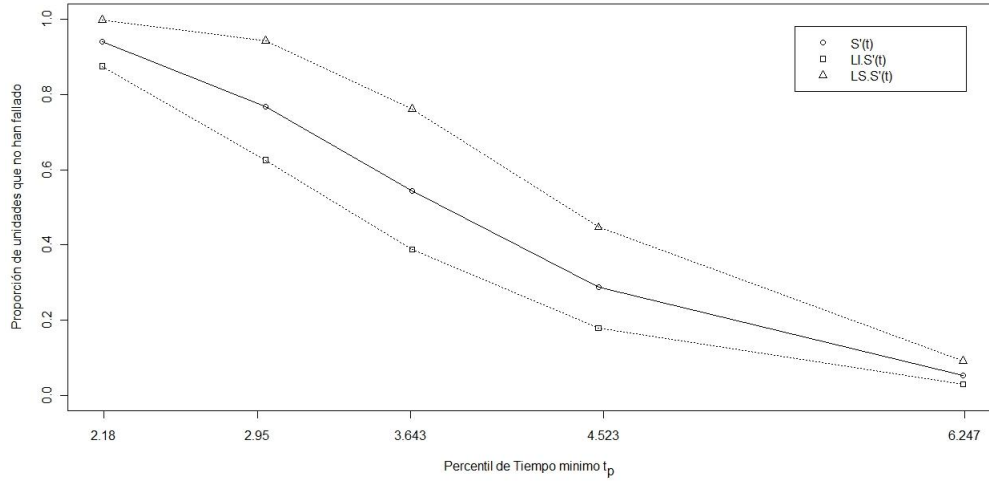


Figura 3.4: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,01$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

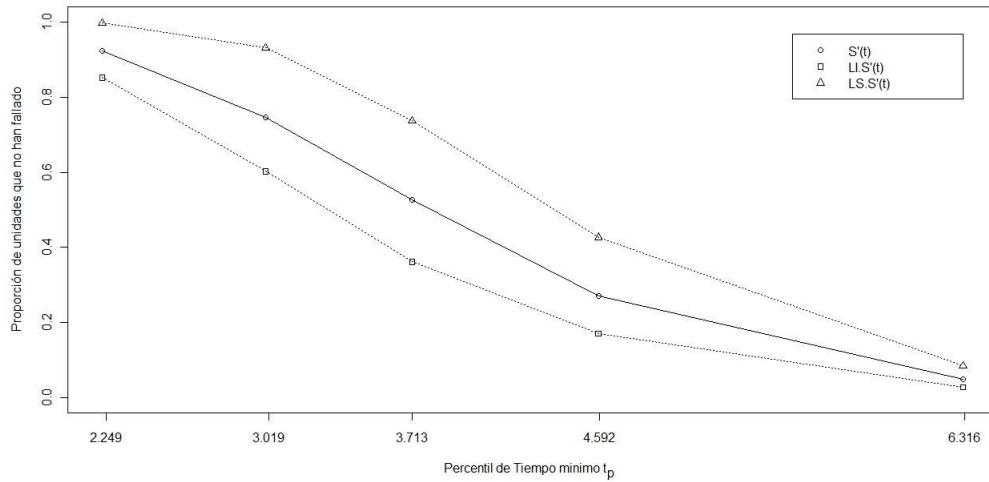


Figura 3.5: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,01$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$ .

En las figuras de la 4.1 a la 4.8, se muestran los intervalos de confianza para  $S^*(t_p)$ , en los cuales se ha variado el parámetro de dependencia  $\gamma$  desde 0.01 (alto grado de dependencia), hasta 0.99 (independencia extrema), con el fin de observar el comportamiento de los intervalos, vemos que en cada uno de los gráficos, el verdadero



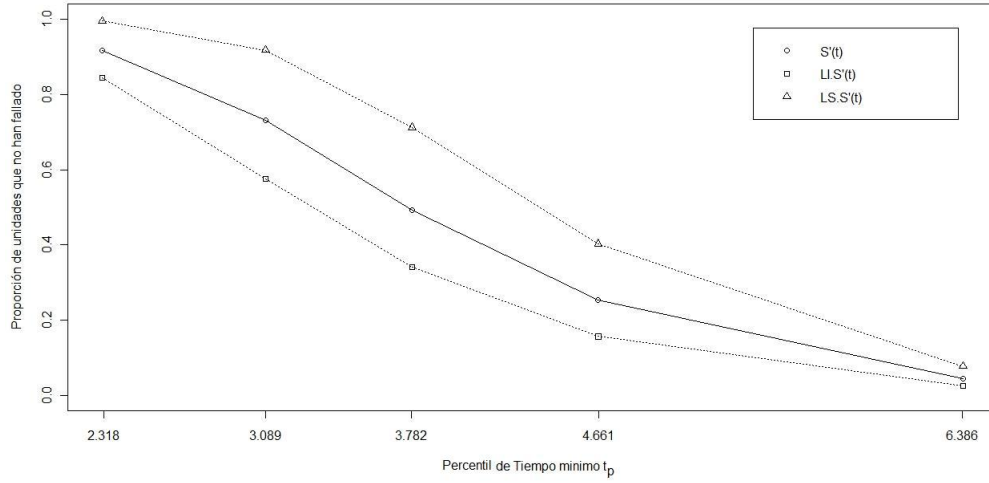


Figura 3.6: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,2$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

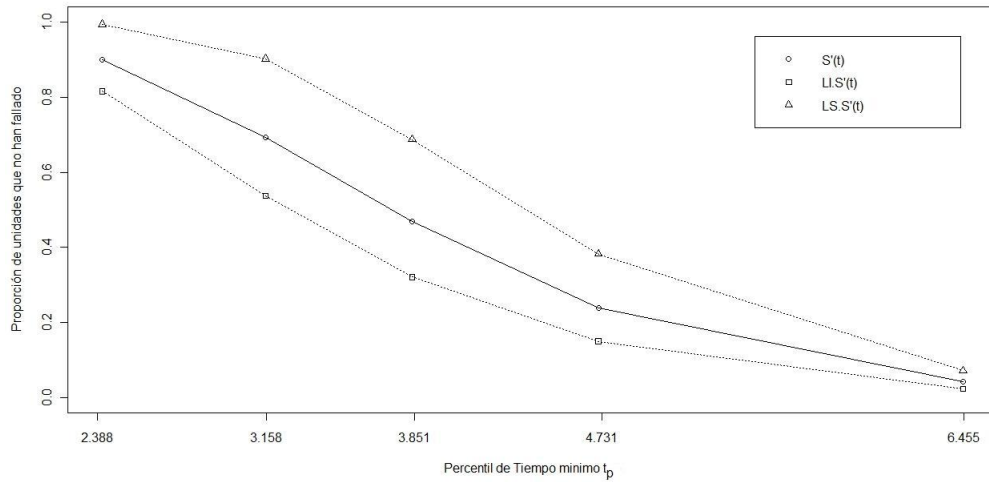


Figura 3.7: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,5$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

valor de  $S^*(t_p)$ , cae dentro de las bandas de confianza, por ejemplo en la figura 3.5, para  $t_{0,95} = 6,386$ ,  $S(6,386) = 0,05$ ,  $LI.\hat{S}^*(t)=0.0437$  y  $LS.\hat{S}^*(t)=0.0587$ . En este y en cada uno de los propuestos en este trabajo, el valor verdadero de  $S(t_p)$ , cae dentro de la bandas de confianza, lo que permite afirmar que no hay diferencia significativa entre

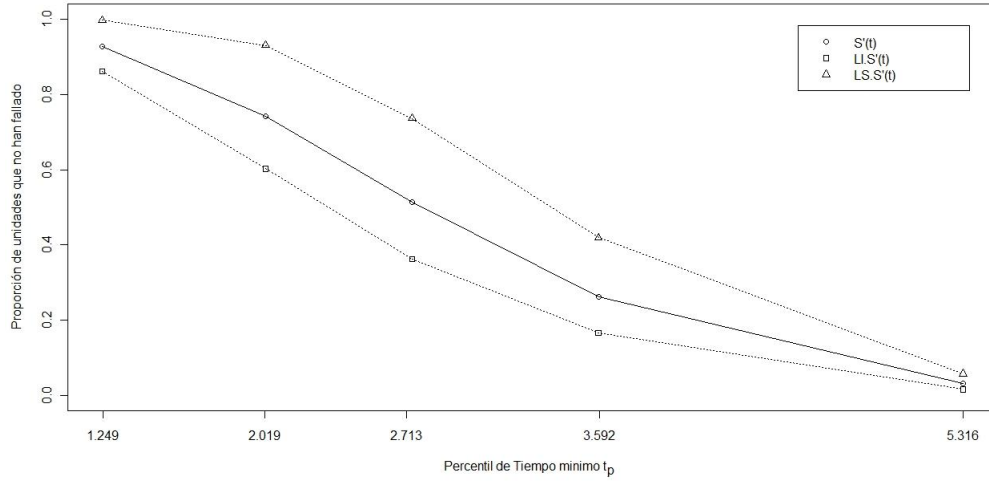


Figura 3.8: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,9$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

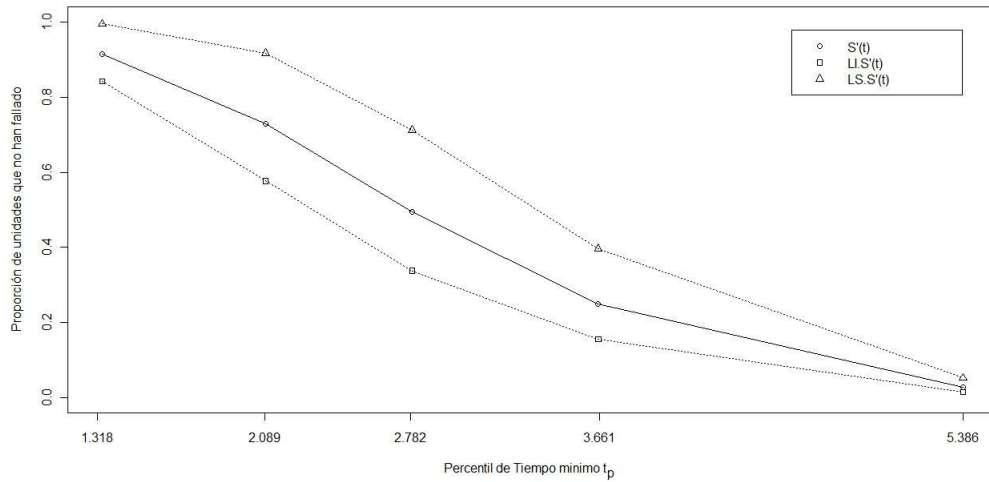


Figura 3.9: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,99$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

$S(t_p)$  y  $S^*(t_p)$ . La figura 3.12 muestra el diagrama box plot para el caso de la distribución logística con parámetros de forma  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$  y parámetro de dependencia  $\gamma = 0,1$ . Este gráfico nos permita apreciar la variabilidad del estimador  $\hat{S}^*(t)$ , y en el cada uno de los percentiles del tiempo mínimo,  $t_p$ ) con  $p=0.05, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.95$  en este gráfico

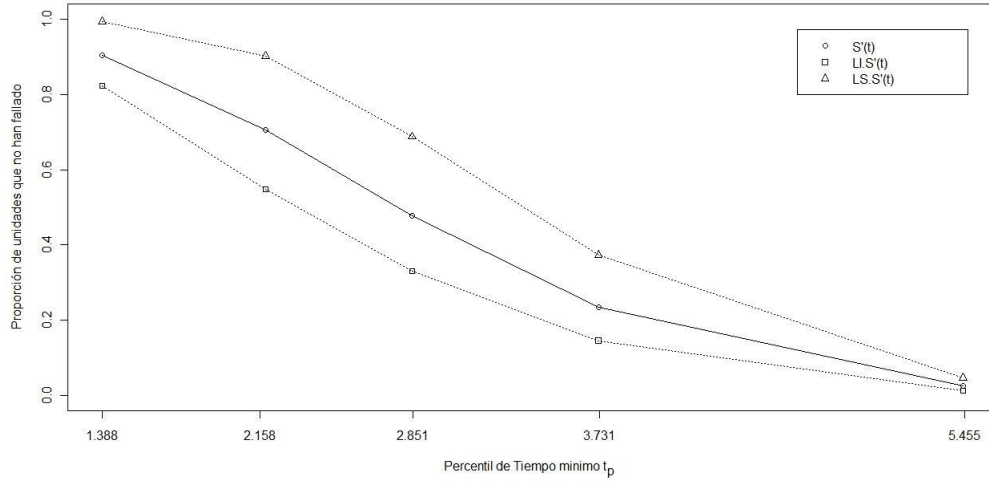


Figura 3.10: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 5$  y  $\gamma = 0,5$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

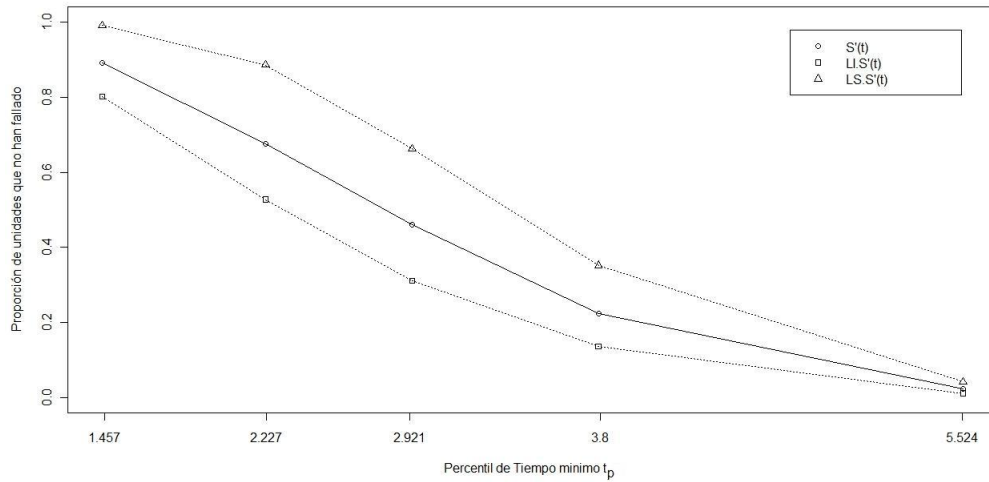


Figura 3.11: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 5$  y  $\gamma = 0,1$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

se representa el verdadero valor de  $S(t_p)$  con un óvalo en negrita, notamos por ejemplo en cada uno de los percentiles el verdadero valor de  $S(t_p)$ , se encuentra muy cercano a la mediana de  $\hat{S}^*(t)$ . Los resultados de estas simulaciones son similares en todos los escenarios propuestos. Esto indica que el estimador  $\hat{S}^*(t)$  tiene un buen comportamiento

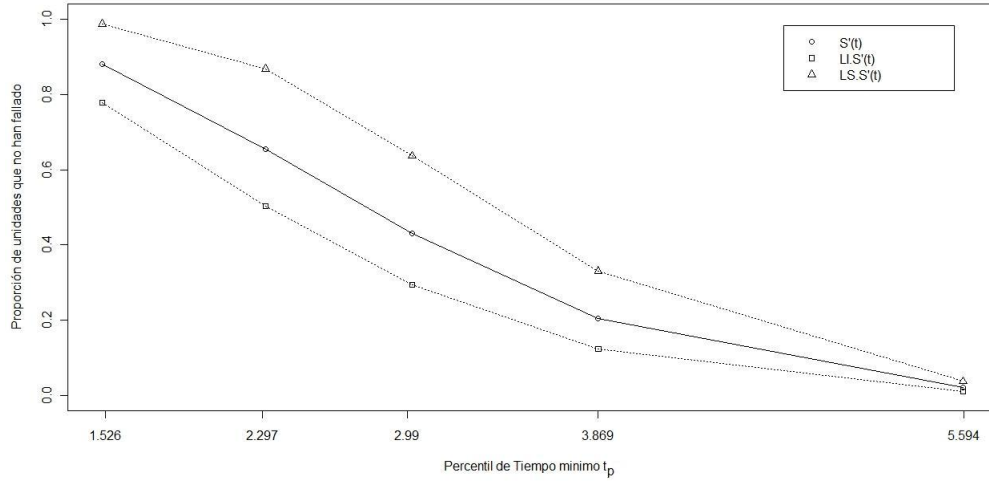


Figura 3.12: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución logística con  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 5$  y  $\gamma = 0,8$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

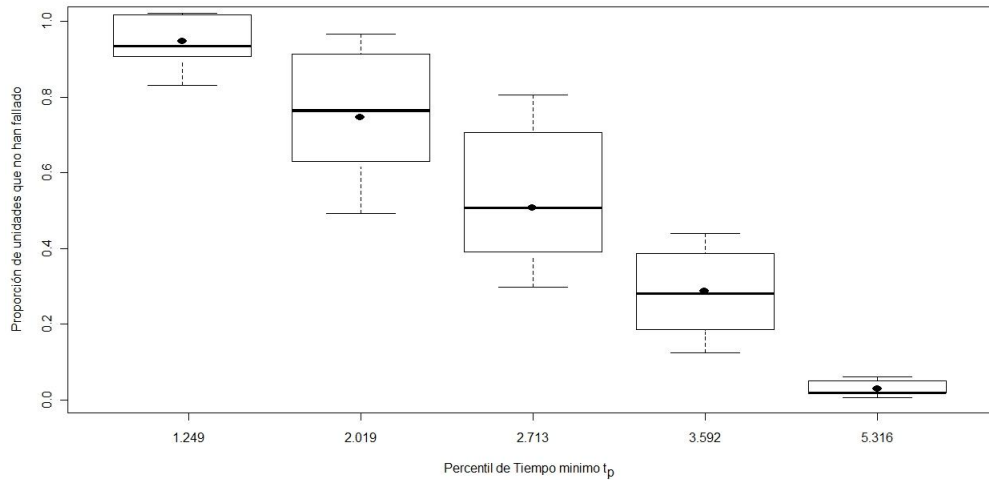


Figura 3.13: Diagrama de caja y bigotes para el caso logístico  $\mu_1 = \mu_2 = 3$  y  $\gamma = 0,9$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

en escenario de dependencia extrema o independencia. Lo que muestra evidencia de que no hay diferencia significativa entre  $\hat{S}^*(t)$  y  $S(t_p)$ . Estos resultados son similares a los de otros autores como Manotas et al(2008), que estudiaron este mismo problema, en distribuciones Weibull y Lognormales.[6]

$t_{0,05}$						
	$\mu_1 = 3, \mu_2 = 3$		$\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$		$\mu_1 = 5, \mu_2 = 7$	
$\gamma$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.01</b>	0.01756845	0.05967881	0.02797115	0.05934967	0.01200322	0.0530483
<b>0.1</b>	0.00158693	0.05806196	0.02533462	0.05931868	0.01087539	0.05783469
<b>0.2</b>	0.00135217	0.06074463	0.02301471	0.05678048	0.01008707	0.0564265
<b>0.3</b>	0.00120848	0.06535161	0.0206266	0.06059966	0.09084928	0.05793353
<b>0.4</b>	0.01105892	0.05736961	0.01802454	0.06390817	0.0107625	0.05533596
<b>0.5</b>	0.09910557	0.05803008	0.01603349	0.05768807	0.0106977	0.0599083
<b>0.6</b>	0.09908195	0.05704387	0.01458383	0.05200689	0.00962284	0.06055303
<b>0.7</b>	0.01006931	0.05903839	0.01272245	0.05468008	0.01050261	0.05723447
<b>0.8</b>	0.01060948	0.0603362	0.0115369	0.05420367	0.00994807	0.06007807
<b>0.9</b>	0.09010521	0.06029178	0.00988658	0.05775069	0.01040833	0.05718376
<b>0.99</b>	0.01748458	0.05959484	0.00918185	0.05933937	0.01037569	0.05816381

Tabla 3.1: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,05})$  para la distribución logística

$t_{0,25}$						
	$\mu_1 = 3, \mu_2 = 3$		$\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$		$\mu_1 = 5, \mu_2 = 7$	
$\gamma$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.01</b>	0.15701574	0.3933306	0.1600436	0.3970399	0.1971642	0.421721
<b>0.1</b>	0.1856445	0.37607115	0.189688	0.38516128	0.18072878	0.41667238
<b>0.2</b>	0.16025431	0.35794785	0.20725614	0.40091103	0.16663069	0.41379442
<b>0.3</b>	0.1792551	0.34204812	0.19460826	0.40168259	0.15919837	0.41077047
<b>0.4</b>	0.18062381	0.37075818	0.17683825	0.40033685	0.18715496	0.39831903
<b>0.5</b>	0.15396368	0.39113367	0.1660798	0.410914	0.16927834	0.39956795
<b>0.6</b>	0.16203104	0.34101484	0.15978566	0.39598444	0.1915065	0.39830433
<b>0.7</b>	0.19968642	0.33090487	0.16488455	0.37380448	0.17053912	0.3905209
<b>0.8</b>	0.17256828	0.38094238	0.17320558	0.37515433	0.19234903	0.38352489
<b>0.9</b>	0.15636153	0.37193558	0.177696	0.38304564	0.18380993	0.39260904
<b>0.99</b>	0.1772951	0.3921537	0.19557635	0.37899354	0.17754631	0.4132848

Tabla 3.2: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,25})$  para la distribución logística

$t_{0,5}$						
	$\mu_1 = 3,$	$\mu_2 = 3$	$\mu_1 = 2,$	$\mu_2 = 5$	$\mu_1 = 5,$	$\mu_2 = 7$
$\gamma$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.01</b>	0.38372421	0.65035331	0.40696302	0.66146457	0.40594997	0.68409097
<b>0.1</b>	0.3881722	0.6633432	0.41447486	0.65291322	0.40446708	0.66216018
<b>0.2</b>	0.39150993	0.67249656	0.4256617	0.67068832	0.41719803	0.69547461
<b>0.3</b>	0.40694852	0.65241022	0.40317613	0.66178355	0.40030121	0.67725125
<b>0.4</b>	0.41331762	0.68278711	0.3973131	0.67062911	0.39711523	0.67468066
<b>0.5</b>	0.4114674	0.6957762	0.39627036	0.68367859	0.39447333	0.6821253
<b>0.6</b>	0.39432532	0.66364559	0.38396232	0.69119801	0.39225567	0.69354573
<b>0.7</b>	0.38767989	0.67332975	0.39211025	0.68286694	0.40838878	0.66264478
<b>0.8</b>	0.38439637	0.66304832	0.39059897	0.69360709	0.38805652	0.69351534
<b>0.9</b>	0.38727688	0.67279647	0.39480962	0.69358723	0.39268228	0.69041248
<b>0.99</b>	0.39327407	0.68156489	0.39637875	0.67130675	0.40157293	0.68455231

Tabla 3.3: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,5})$  para la distribución logística

$t_{0,75}$						
	$\mu_1 = 3,$	$\mu_2 = 3$	$\mu_1 = 2,$	$\mu_2 = 5$	$\mu_1 = 5,$	$\mu_2 = 7$
$\gamma$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.01</b>	0.61447493	0.88001466	0.61201787	0.91174632	0.62417938	0.92765389
<b>0.1</b>	0.61203041	0.89573325	0.60898757	0.9062678	0.61970509	0.93699871
<b>0.2</b>	0.63964913	0.83368084	0.63664189	0.91627415	0.63613813	0.92616536
<b>0.3</b>	0.6357424	0.88043078	0.65290385	0.95339952	0.64376964	0.93525469
<b>0.4</b>	0.61389804	0.87718054	0.62752357	0.9427012	0.62368617	0.92416556
<b>0.5</b>	0.61139856	0.87404933	0.60130791	0.93070569	0.59832272	0.92963044
<b>0.6</b>	0.62469697	0.86737043	0.65616887	0.91719704	0.6157186	0.91450364
<b>0.7</b>	0.62699261	0.87069404	0.65515833	0.90224148	0.62546649	0.90899577
<b>0.8</b>	0.62434891	0.8641263	0.62700122	0.8986138	0.61877249	0.91883227
<b>0.9</b>	0.61567856	0.8604182	0.60264193	0.89674621	0.60494656	0.8962833
<b>0.99</b>	0.6144621	0.87978119	0.63481193	0.90850693	0.62494656	0.91862833

Tabla 3.4: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,75})$  para la distribución logística

$t_{0,95}$						
	$\mu_1 = 3,$	$\mu_2 = 3$	$\mu_1 = 2,$	$\mu_2 = 5$	$\mu_1 = 5,$	$\mu_2 = 7$
$\gamma$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.01</b>	0.89758437	0.99463193	0.93475602	0.99969316	0.93280056	0.9996868
<b>0.1</b>	0.89331766	0.99229346	0.91818852	0.99952609	0.92255315	0.99949081
<b>0.2</b>	0.91598207	0.98863215	0.90345443	0.99917938	0.90947528	0.99915744
<b>0.3</b>	0.88066723	0.98490178	0.89591271	0.99866864	0.89218892	0.99862018
<b>0.4</b>	0.88145799	0.97912761	0.87073209	0.99795301	0.87638179	0.99788451
<b>0.5</b>	0.87652873	0.97141313	0.86288027	0.99684712	0.86344219	0.99678106
<b>0.6</b>	0.85019293	0.96114814	0.84446078	0.99543236	0.84051418	0.99530819
<b>0.7</b>	0.85998432	0.95152619	0.82329539	0.99346214	0.82313787	0.99319892
<b>0.8</b>	0.79437822	0.93778343	0.79747041	0.99090298	0.79990609	0.99052912
<b>0.9</b>	0.76421165	0.9231618	0.77889419	0.98743346	0.77901161	0.9871756
<b>0.99</b>	0.81897538	0.99450302	0.81798538	0.98382462	0.81723339	0.98298857

Tabla 3.5: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

Las tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 muestran los limites inferior y superior de los intervalos de confianza bootstrap para  $\hat{S}^*(t_p)$ , para diferentes valores de  $\gamma$ , estos no resultan ser muy diferentes y contienen el valor verdadero de  $\hat{S}^*(t_p)$ .

## CAPÍTULO 4

---

### Tiempos de falla Gamma

---

En este capítulo se estudian los tiempos de falla gamma.

La distribución gamma se emplea de manera extensa en una gran diversidad de áreas; por ejemplo, para representar el tiempo aleatorio de falla de un sistema que falla solo si de manera exacta los componentes fallan y la falla de cada componente ocurre a una frecuencia constante  $\lambda = \frac{1}{\theta}$  (donde  $\theta > 0$  el cual es parámetro de escala de la distribución gamma ) por unidad de tiempo. También se emplea en problemas de linea de espera para representar el intervalo total para completar una reparación si esta se lleva a cabo en subestaciones; completar la reparación en cada subestación es un evento independiente que ocurre a una frecuencia constante igual  $\lambda = \frac{1}{\theta}$ . También puede ser usada para modelar resistencia de materiales; supóngase que una pieza metálica se encuentra sometida a una cierta fuerza de manera que se romperá después de aplicar un número específico de ciclos de fuerza. Si los ciclos ocurren de manera independiente



y a una frecuencia promedio, entonces el tiempo que debe transcurrir antes de que el material se rompa es una variable aleatoria que cumple con la distribución gamma.[11]

En este capítulo se presentan algunas nociones importantes acerca de la distribución univariada y la distribución bivariada conjunta bivariada de tiempos de falla gamma.

## 4.1. Tiempos de falla Gamma

La función de densidad de la distribución gamma está dada por la expresión:

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \theta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-x}{\theta}\right) \quad x > 0, \quad \alpha, \theta > 0 \quad (4.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\theta$  son los parámetros de forma y escala respectivamente.

Cuando  $\alpha = 1$ , la distribución gamma se reduce a la distribución exponencial con  $\lambda = \frac{1}{\theta}$ .

Cuando  $\theta = 2$  y  $\alpha = \frac{\nu}{2}$ , donde  $\nu$  es un entero positivo, la distribución se conoce con el nombre de la distribución Chi-cuadrado

Cuando  $\alpha$  toma valores enteros, la distribución también se conoce con el nombre de distribución Erlang, en este caso la distribución puede ser interpretada como la suma de variables aleatorias exponenciales.

La función de distribución acumulada gamma es frecuentemente escrita como:

$$F(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \theta^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)\right] dt, \quad x > 0 \quad (4.2)$$

En esta parametrización  $\alpha > 0$  es el parámetro de forma y  $\theta > 0$  es el parámetro de escala.

Esta distribución presenta una función de hazard creciente para valores de  $\alpha > 1$  y para valores de  $\alpha < 1$  su función de supervivencia es decreciente. La verdadera importancia de esta distribución radica en su capacidad de describir distribuciones de tiempos de falla con funciones hazard muy diferentes.

### 4.1.1. Distribución Gamma Bivariada de McKay

La función de distribución gamma bivariada surge como una adecuada distribución para modelar tiempos de supervivencia en muchas areas, incluyendo las pruebas de confiabilidad en comunicaciones[10][5].

En el contexto de confiabilidad industrial un ejemplo son los modelos de fuerza tensión, donde se describe la vida de un componente al cual se le tiene una resistencia aleatoria  $Y$  y se somete a una presión aleatoria  $X$ , el componente falla en el momento en que la presión aplicada excede la resistencia del componente, lo que convenientemente se puede expresar como  $Y > X$  lo que puede verse como  $R = P(X < Y)$  es una medida del componente de ingeniería en conceptos relacionados con estructuras, deterioro de motores y fatiga de los componentes cerámicos[11].

Una de las distribuciones conjuntas de la distribución Gamma bivariada esta dada por la expresión:

$$f(x, y) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (y-x)^{q-1} \exp(-ay) \quad (4.3)$$

Las distribuciones marginales están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} f(x, p, a) &= \frac{1}{\Gamma(p)\left(\frac{1}{a}\right)^p} x^{(p-1)} \exp(-ax) \\ f(y, p+q, a) &= \frac{1}{\Gamma(p+q)\left(\frac{1}{a}\right)^{p+q}} x^{(p+q)-1} \exp(-ay) \end{aligned}$$

para  $y > x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $p, q > 0$ . Las distribuciones marginales son gamma con parámetros de forma  $p$  y  $p+q$  respectivamente, y parámetro de escala  $(1/a)$ . Esta función se conoce como la distribución Gamma bivariada de McKay[7].

La función de confiabilidad para la distribución Gamma bivariada de McKay bajo el supuesto de dependencia, esta dada por la expresión[2]:

$$P(T_1 > t, T_2 > t) = \int_t^\infty \int_{t_1}^\infty \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_2 dt_1$$

La confiabilidad para el tiempo de falla de un sistema con dos modos de falla gamma bivariada de McKay(ver apendice A):

$$S(t/a, p) = 1 - \Gamma(m < at/\alpha = p, \beta = 1).$$

Observe que  $S(t/a, p)$  es la función de confiabilidad de  $m = at_1$ , donde  $m$  tiene distribución gamma con parámetro de forma  $\alpha = p$  y parámetro de escala  $\beta = 1$ .

El calculo de la función de confiabilidad de la distribución gamma bivariada de McKay bajo el supuesto de independencia esta dada por la expresión:

$$P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t) P(T_2 > t)$$

Lo que se puede expresar como:

(El desarrollo matemático se muestra en el anexo 2)

$$S^*(t | p, q, a) = \Gamma(T_1 < t | p, \frac{1}{a}) \Gamma(T_2 < t | p + q, \frac{1}{a})$$

Las distribuciones marginales de la función gamma bivariada de McKay son gamma con parámetros de forma  $p$  y  $p + q$  respectivamente, y el coeficiente de correlación esta dado por:

$$Corr(X_1, X_2) = \sqrt{\frac{p}{p + q}} \quad (4.4)$$

A medida que el coeficiente de correlación aumenta, entonces la dependencia entre  $T_1$  y  $T_2$  aumenta (Samuel Kotz)[4].

#### 4.1.2. Algoritmo para generar los tiempos de falla de la distribución gamma bivariada de McKay

Para simular tiempos de falla gamma bivariados se hace uso del siguiente algoritmo, tomado de Kotz y Balakrishnan (2000)[4]:

Se genera  $U$ , donde  $U$  se distribuye *beta* ( $p + q$ ) con parámetro de forma  $p + q$ .

Se genera  $V$ , donde  $V$  se distribuye *gamma* ( $p + q, 1/a$ )

parámetros de forma  $p + q$  y parámetros de escala  $1/a$

Se genera  $X = UV$  que es una distribución gamma con parámetros de forma  $q$  y parámetros de escala  $1/a$ , donde  $0 < a < \infty$ .

$X$  y  $V$  tienen distribución conjunta Gamma bivariada de McKay. A continuación se muestra la gráfica de la distribución gamma bivariada de McKay con parámetros de forma  $p = q = 6$  y  $a = 2$ , estas gráficas se construyeron, usando la librería `rgl` (3D visualization device system) del software R, y la función `persp3d`, que permite generar gráficos en tres dimensiones y rotarlos en cualquier dirección, el algoritmo utilizado para la construcción de estas gráficas se muestra en el anexo J. Para verificar, si el algoritmo propuesto por Kotz y Balakrishnan, se comportaba adecuadamente se construyeron los contornos teóricos de probabilidad, para la distribución gamma bivariada de McKay, para distintos escenarios donde variaban los parámetros de forma y escala, en todos los casos estudiados se observó un comportamiento muy bueno del algoritmo. La figura 3.1 y 3.2 nos muestran la gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de McKay, con parámetros de forma  $p = q = 0,5$  y parámetro de escala  $a = 3$ , la gráfica de esta función se publicó por primera vez en 1987, en artículo de Kellogg y Barnes[4]. la figura 3,2 y 3,3, nos muestran la misma función de densidad, pero desde otro ángulo, en la figura 3,3, podemos apreciar la gráfica de la función de densidad desde arriba, al compararla con la figura 3,4 que nos muestra los gráficos de contorno esta distribución, nos permite comprender mejor el resultado obtenido al utilizar el algoritmo de Kotz y Balakrishnan para generar los datos de la distribución gamma bivariada de McKay.

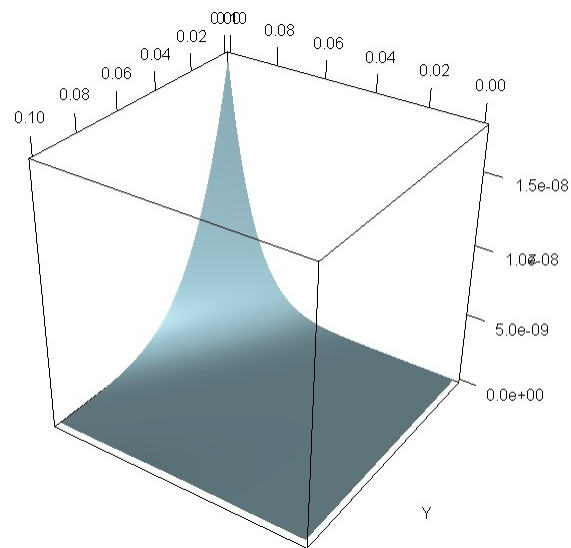


Figura 4.1: Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de Mckay con parámetros  $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$  y  $\rho = 0,6$ .

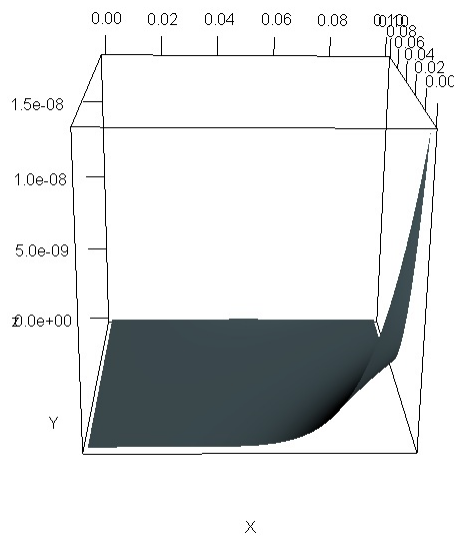


Figura 4.2: Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de Mckay con parámetros  $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$  y  $\rho = 0,6$ .

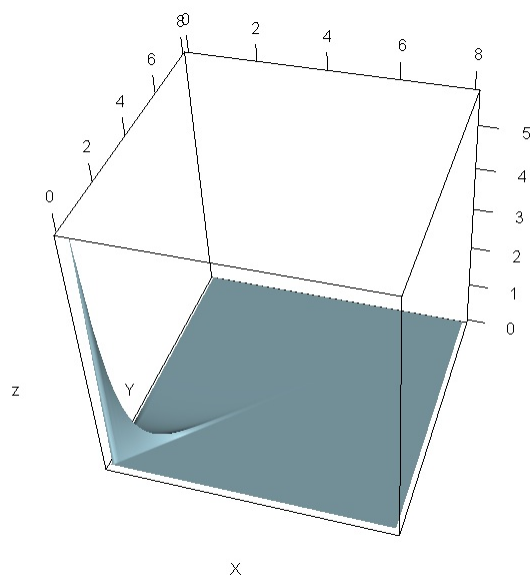


Figura 4.3: Gráfica de la función de densidad de la distribución gamma bivariada de Mckay con parámetros  $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$  y  $\rho = 0,7$ .

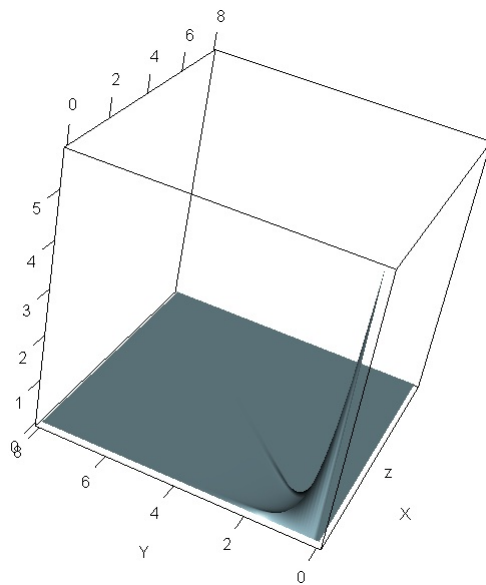


Figura 4.4: Diagramas de dispersión de  $n = 100$  datos simulados de una densidad conjunta Gamma bivariada de McKay  $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$  y  $\rho = 0,6$ .

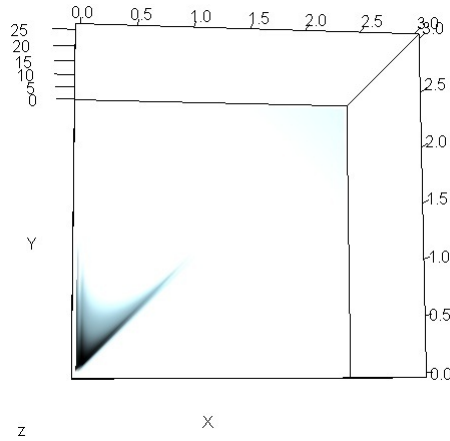


Figura 4.5: Diagramas de dispersión de  $n = 100$  datos simulados de una densidad conjunta Gamma biviada de McKay  $a = 3, p = 0,5, q = 0,5$  y  $\rho = 0,7$ .

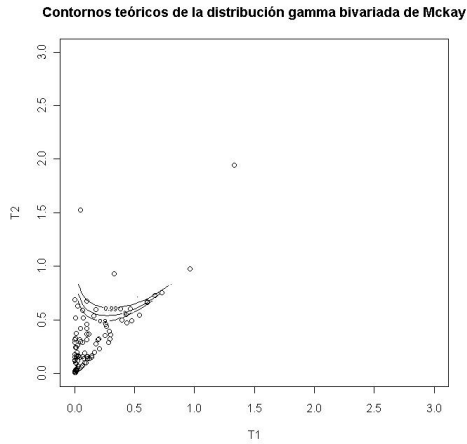


Figura 4.6: Diagramas de dispersión de  $n = 100$  datos simulados de una densidad conjunta Gamma biviada de McKay  $a = 3, p = 0,5, q = 0,5$  y  $\rho = 0,7$ , con sus contornos teóricos.

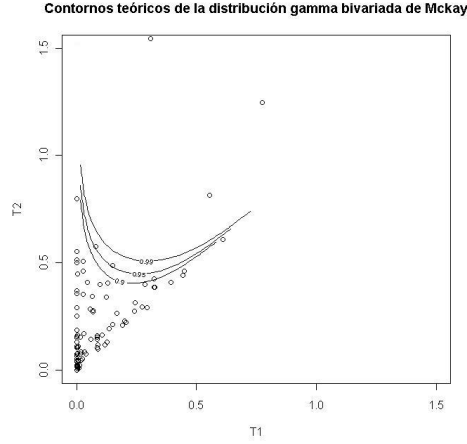


Figura 4.7: Diagramas de dispersión de  $n = 100$  datos simulados de una densidad conjunta Gamma biviariada de McKay  $a = 3, p = 0,3, q = 0,5$  y  $\rho = 0,6$ , con sus contornos teóricos.

### 4.1.3. Metodología y resultados

Para el estudio de la distribución de confiabilidad gamma biviariada de McKay, los tiempos de falla de cada una de las distribuciones biviariadas, no son iguales. Tienen diferente parámetro de forma, y el mismo parámetro de escala.

Las funciones hazard de las distribuciones gamma univariadas dependen del valor del parámetro de forma, así cuando el parámetro de forma es menor que 1, la función hazard es decreciente; cuando el parámetro de forma es igual a 1, la función hazard es constante y cuando la el parámetro de forma es mayor que 1, la función hazard es creciente.

Se exploraron diferentes casos donde los parámetros de forma serán algunas veces mayores que 1 (modo de falla con hazard creciente) y otro con parámetro de forma menores que 1 (modo de falla con hazard decreciente). Para cada uno de los escenarios descritos, se generan 10000 muestras de tamaño  $n = 50$ , de tiempos biviariados de la distribución gamma biviariada de McKay. Para efectos de comparación se obtienen intervalos de confianza bootstrap percentil del 95% para  $\hat{S}^*(t)$ . Con el fin de comparar los efectos de asumir independencia en estos casos se tomaron diferentes niveles de



dependencia, desde 0.1, hasta, 0.9. En este caso los valores cercanos a cero (0.1, 0.2, 0.3) indican un menor grado de dependencia entre las dos variables, y los valores cercanos uno (0.7, 0.8, 0.9) indican mayor grado de dependencia. En estos gráficos, para cada uno de los percentiles del tiempo mínimo,  $t(p)$  con  $\rho=0.05, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.95$  se tiene el valor verdadero de  $S(t(p))$ , el límite inferior de  $\hat{S}^*(t)$ , se denota como  $LI.\hat{S}^*(t)$  y el límite superior de  $\hat{S}^*(t)$  se denota como  $LS.\hat{S}^*(t)$ . La línea continua une los valores de  $S(t(p))$ , la línea discontinua que esta por debajo de la línea continua, une los valores de los límites inferiores de la estimación de  $\hat{S}^*(t(p))$ , y la línea discontinua que esta por encima de la línea continua, une los límites superiores de la estimación de  $\hat{S}^*(t(p))$ . De esta manera se obtienen las bandas de confianza aproximadas[1].

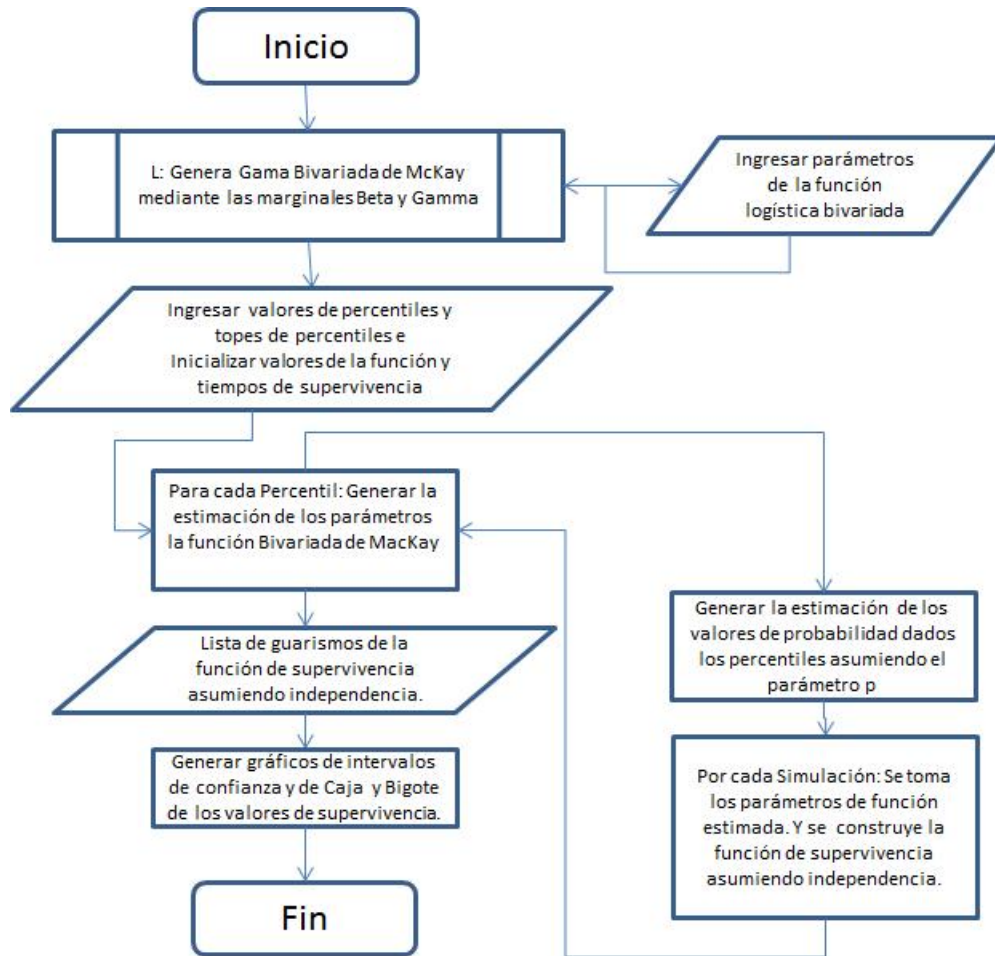


Figura 4.8: Diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución Gamma bivariada.

La figura 4,8 muestra el diagrama de flujo del algoritmo que genera las bandas de confianza para la distribución gamma bivariada de Mckay.

Los resultados obtenidos con los escenarios donde los parámetros de forma toman valores inferiores a uno, muestran resultados similares a los obtenidos cuando los parámetros de forma son mayores que uno, por lo cual en este capitulo se discuten los resultados asociados al caso  $a = 1, q = 0,8, p = 0,76$  y  $a = 3, q = 0,5, p = 0,48$  y  $a = 0,5, p = 0,5, q = 0,5$ .

En las figuras de la 4.8 a la 4.13, se muestran los intervalos de confianza para  $S^*(t_p)$ , en los cuales se ha variado el parámetro de dependencia  $\gamma$ , con el fin de observar el comportamiento de los intervalos, vemos que en cada uno de los gráficos, el verdadero valor de  $S^*(t_p)$ , cae dentro de las bandas de confianza, por ejemplo en la figura 4.12, para  $t_{0,5} = 0,4215$ ,  $S(0,4215) = 0,5$ , LI. $\hat{S}^*(t)=0.417$  y LS. $\hat{S}^*(t)=0.597$ . En este y en cada uno de los propuestos en este trabajo, el valor verdadero de  $S(t_p)$ , cae dentro de la bandas de confianza, lo que permite afirmar que no hay diferencia significativa entre  $S(t_p)$  y  $S^*(t_p)$ . La figura 4.10 muestra el diagrama box plot para el caso de la distribución gama bivariada con parámetros  $a = 1, q = 0,8, p = 0,76$ . Este gráfico nos permita apreciar la variabilidad del estimador  $\hat{S}^*(t)$ , y en el cada uno de los percentiles del tiempo mínimo,  $t_p$ ) con  $p=0.05, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.95$  en este gráfico se representa el verdadero valor de  $S(t_p)$  con un óvalo en negrita, notamos por ejemplo en cada uno de los percentiles el verdadero valor de  $S(t_p)$ , se encuentra muy cercano a la mediana de  $\hat{S}^*(t)$ . Los resultados de estas simulaciones son similares en todos los escenarios propuestos. Esto indica que el estimador  $\hat{S}^*(t)$  tiene un buen comportamiento en escenario de dependencia extrema o independencia. Lo que muestra evidencia de que no hay diferencia significativa entre  $\hat{S}^*(t)$  y  $S(t_p)$ . Estos resultados son similares a los encontrados en el capitulo 3, para la distribución logística bivariada[6].

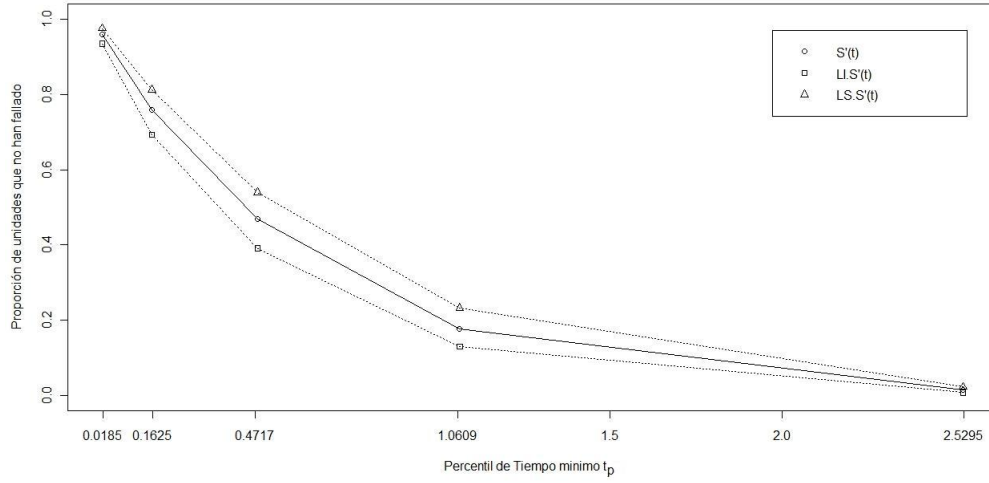


Figura 4.9: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma  $a = 1, q = 0,7, p = 0,483$  y  $\rho = 0,7$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

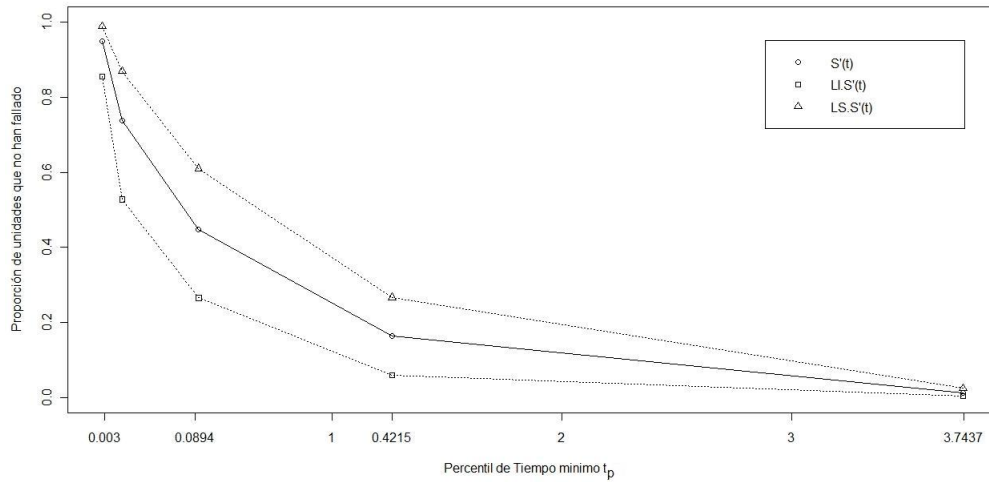


Figura 4.10: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma  $a = 1, q = 0,3, p = 0,125$  y  $\rho = 0,2$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

Las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 muestran los limites inferior y superior de los intervalos de confianza bootstrap para  $\hat{S}^*(t_p)$ , para diferentes valores de  $\gamma$ , estos no resultan ser muy diferentes y contienen el valor verdadero de  $\hat{S}^*(t_p)$ .

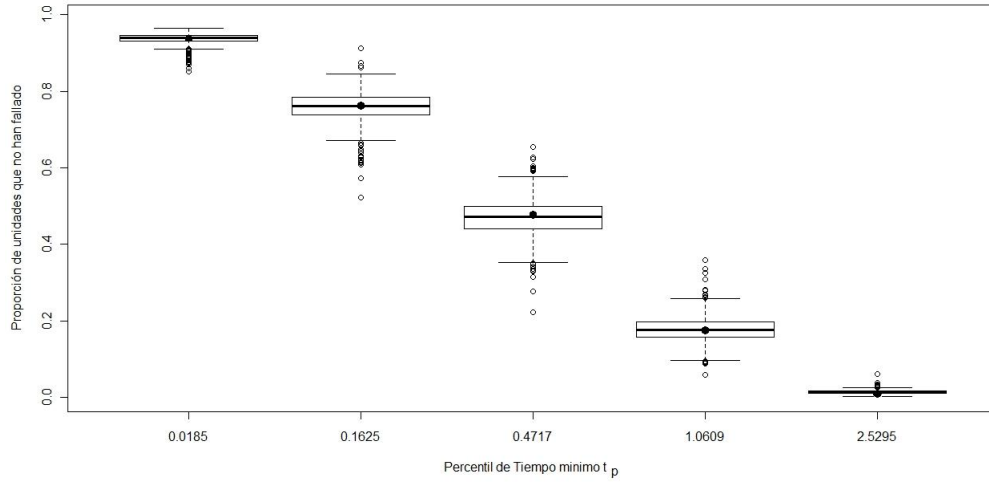


Figura 4.11: Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma  $a = 1, q = 0,7, p = 0,483$  y  $\rho = 0,7$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

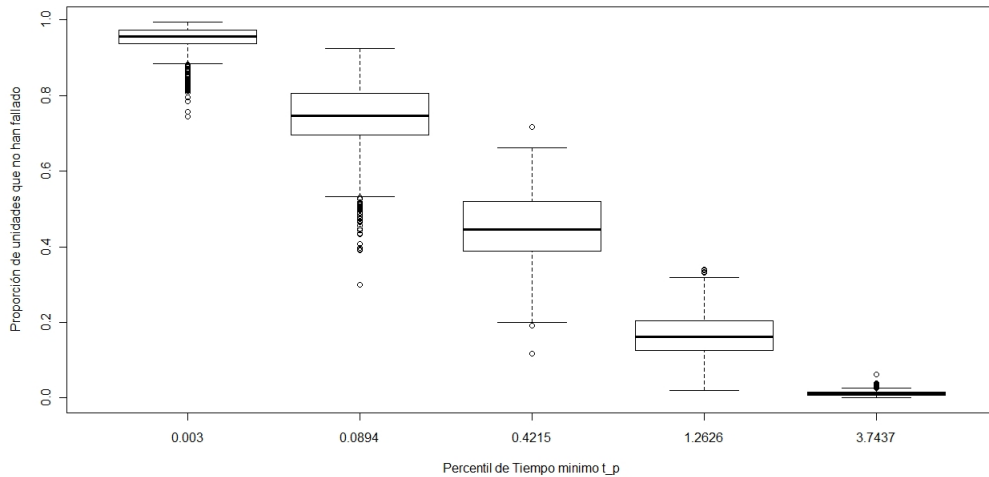


Figura 4.12: Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma  $a = 1, q = 0,3, p = 0,125$  y  $\rho = 0,2$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

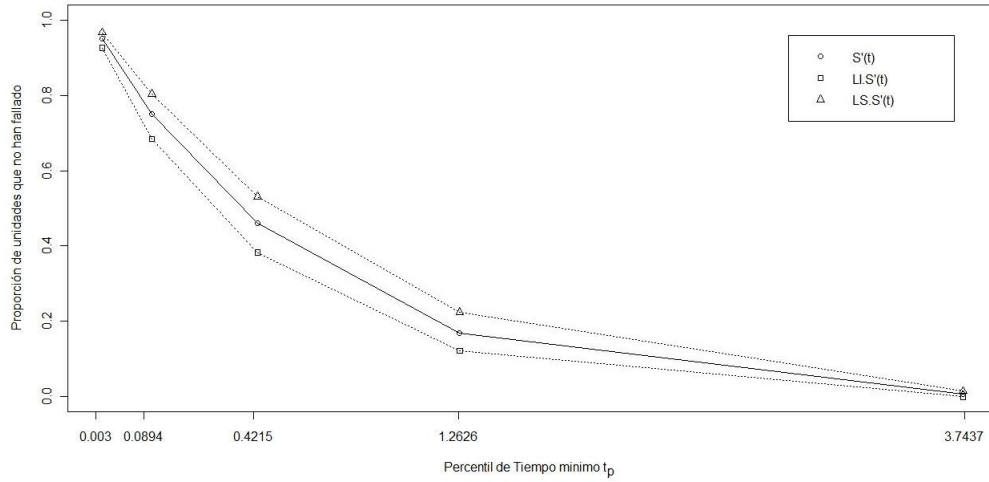


Figura 4.13: Intervalos de confianza bootstrap para la distribución gamma  $a = 3, q = 0,5, p = 0,48$  y  $\rho = 0,9$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

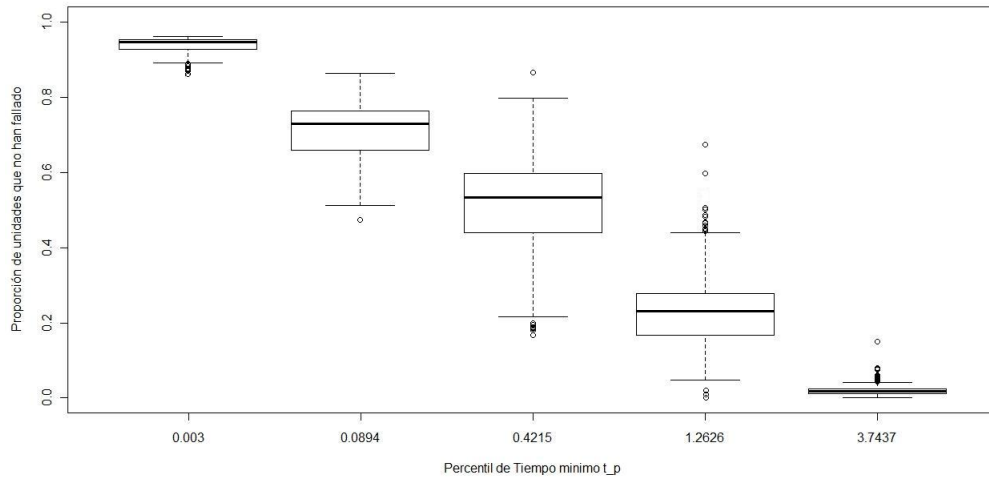


Figura 4.14: Diagrama de caja y bigotes para el caso gamma  $a = 3, q = 0,5, p = 0,48$  y  $\rho = 0,9$  en los percentiles  $t_p$  con  $p=0.05, 0.25, 0.50, 0.75$  y  $0.95$

$t_{0,05}$						
	a=1, q=3		a=3, q=0.5		a=0.5, q=0.1	
$\rho$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.1</b>	0.04015869	0.05195881	0.04253346	0.05186893	0.04108754	0.05347869
<b>0.3</b>	0.04012085	0.0516135	0.0420626	0.05096699	0.03904928	0.05335379
<b>0.5</b>	0.04109956	0.0503008	0.0413496	0.05078876	0.04109787	0.05409983
<b>0.7</b>	0.04031069	0.05209038	0.04125722	0.05368033	0.04105021	0.0527447
<b>0.9</b>	0.04010521	0.05129178	0.0409658	0.05069775	0.04100871	0.05187376

Tabla 4.1: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

$t_{0,25}$						
	a=1, q=3		a=3, q=0.5		a=0.5, q=0.1	
$\rho$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.1</b>	0.12873441	0.29210554	0.12007477	0.2656063	0.12240508	0.2590906
<b>0.3</b>	0.15332027	0.25438552	0.12181423	0.27343402	0.01278188	0.2990526
<b>0.5</b>	0.16137648	0.2646839	0.01612707	0.30476748	0.01082667	0.3166863
<b>0.7</b>	0.1495058	0.29987927	0.12876615	0.28785182	0.1281851	0.3039435
<b>0.9</b>	0.1628746	0.28187924	0.12163609	0.29269259	0.129875	0.3127623

Tabla 4.2: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

$t_{0,5}$						
	a=1, q=3		a=3, q=0.5		a=0.5, q=0.1	
$\rho$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.1</b>	0.3782695	0.59989404	0.35151925	0.58481447	0.35129448	0.62711169
<b>0.3</b>	0.34219821	0.59023577	0.37205151	0.5949925	0.38014068	0.61996179
<b>0.5</b>	0.25069518	0.60778164	0.26961155	0.6193237	0.29143402	0.63838868
<b>0.7</b>	0.43780043	0.54257586	0.43895541	0.54491943	0.46509864	0.52220084
<b>0.9</b>	0.4397561	0.5197543	0.3936754	0.54221751	0.44610915	0.54910125

Tabla 4.3: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

$t_{0,75}$						
	a=1, q=3		a=3, q=0.5		a=0.5, q=0.1	
$\rho$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.1</b>	0.5998366	0.79999984	0.5986065	0.79493219	0.5847537	0.81625361
<b>0.3</b>	0.58900523	0.79443057	0.60126536	0.7878738	0.6179416	0.8344065
<b>0.5</b>	0.67420204	0.81428726	0.67887844	0.9023179	0.6938056	0.81344064
<b>0.7</b>	0.63155602	0.79346623	0.64125463	0.7971948	0.62337305	0.82348442
<b>0.9</b>	0.63036425	0.79947736	0.6428884	0.79993027	0.64555662	0.79045521

Tabla 4.4: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

$t_{0,95}$						
	a=1, q=3		a=3, q=0.5		a=0.5, q=0.1	
$\rho$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$	LI. $\hat{S}^*(t)$	LS. $\hat{S}^*(t)$
<b>0.1</b>	0.9058177	0.995207	0.90781441	0.9999236	0.8903174	0.9999849
<b>0.3</b>	0.89684551	0.984362	0.89314763	0.98867119	0.8977537	0.9999999
<b>0.5</b>	0.90947815	0.97565905	0.8996074	0.9726277	0.89752638	1
<b>0.7</b>	0.79612993	0.99769381	0.89016434	0.9841279	0.90538669	0.9999999
<b>0.9</b>	0.79217533	0.9999016	0.7918167	0.9978588	0.79752672	1

Tabla 4.5: Intervalos de confianza para  $\hat{S}^*(t_{0,95})$  para la distribución gamma

## CAPÍTULO 5

---

### Ventajas y Desventajas del estimador $\hat{S}^*(t)$

---

En las aplicaciones reales a procesos de ingeniería el estimador  $\hat{S}^*(t)$  podría resultar ser poco practico y de uso limitado, puesto que no le permitiría al ingeniero encargado de monitorear el proceso conocer el efecto que puede tener en la confiabilidad del sistema cambiar, aumentar o disminuir el tiempo de vida de una de las componentes del sistema, es decir el estimador le permitiría conocer la confiabilidad del sistema, pero no podría utilizarse para hacer perdicionos acerca del comportamiento de la confiabilidad del sistema al implementar cambios en el tiempo de vida de uno de los componentes del sistema. En esta sección se muestra que el estimador  $\hat{S}^*(t)$ , no resulta ser de maxima verosimilitud , puesto que no cumple con la propiedad de invarianza, para esto se procederá usando una metodología similar a la propuesta por Meeker y Escobar en 2009 [9]. de la siguiente manera.

Primero se fijan  $\mu_1 = 3$  y  $\mu_2 = 7$ , y con esto se obtiene  $S(t)$  ; luego se calcula

$\hat{S}^*(t) = \hat{S}_1^*(t) \cdot \hat{S}_2^*(t)$  Se obtiene:

$$\hat{S}^*(t); \quad \hat{S}_1^*(t); \quad \hat{S}_2^*(t); \quad \hat{\mu}_1; \quad \hat{\mu}_2$$



Ahora se calcula  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ , tomando como parámetros a

$$\hat{\mu}_{1(nuevo)} = \hat{\mu}_1 \text{ y } \hat{\mu}_{1(nuevo)} = \hat{\mu}_1; \quad \hat{\mu}_{2(nuevo)} = 3 \cdot \hat{\mu}_2$$

$$\hat{S}^*(t)_{nuevo} = \hat{S}_1^*(t) \cdot \hat{S}_2^*(t)_{(nuevo)}$$

Se obtiene :

$$\hat{S}^*(t)_{(nuevo)}; \quad \hat{S}_1^*(t)_{(nuevo)}; \quad \hat{S}_2^*(t)_{(nuevo)}$$

Eso se realiza para diferentes niveles de dependencia, y se calcula el cambio porcentual entre  $\hat{S}^*(t)$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$ .

Si el estimador  $\hat{S}^*(t)$ , fuera de maxima verosimilitud, estos cambios porcentuales, deberían ser muy cercanos a cero, pero vemos que no es así, también podemos observar que la magnitud de estos cambios porcentuales, depende en gran medida del nivel de la correlación. A continuación se muestran las tablas con los resultados obtenidos. El algoritmo que permite generar estos resultados se presenta en el anexo H.

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138575207000	0.075921112000	45.21 %
0.25	0.066735396000	0.033931469000	49.16 %
0.5	0.033948699000	0.013829957000	59.26 %
0.75	0.014223785000	0.003395207000	76.13 %
0.95	0.002551784000	0.000136384000	94.66 %

Tabla 5.1: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,1$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138615652000	0.070969793800	48.80 %
0.25	0.066755685000	0.031305426900	53.10 %
0.5	0.033925842000	0.012492030800	63.18 %
0.75	0.014228231000	0.003011879800	78.83 %
0.95	0.002552586000	0.000119223200	95.33 %

Tabla 5.2: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,2$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138656110000	0.066302853500	52.18 %
0.25	0.066711510000	0.028794622700	56.84 %
0.5	0.033936340000	0.011278524800	66.77 %
0.75	0.014232680000	0.002668902400	81.25 %
0.95	0.002550840000	0.000103994200	95.92 %

Tabla 5.3: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,3$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138568031000	0.061838870000	55.37 %
0.25	0.066731797000	0.026465900000	60.34 %
0.5	0.033946836000	0.010164250000	70.06 %
0.75	0.014222997000	0.002358338000	83.42 %
0.95	0.002551642000	0.000090867990	96.44 %

Tabla 5.4: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 7$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,4$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138608474000	0.057687000000	58.38 %
0.25	0.066752084000	0.024277890000	63.63 %
0.5	0.033923979000	0.009129662000	73.09 %
0.75	0.014227442000	0.002085535000	85.34 %
0.95	0.002552444000	0.000079382530	96.89 %

Tabla 5.5: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 7$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,5$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138648929000	0.053764920000	61.22 %
0.25	0.066707916000	0.022197670000	66.72 %
0.5	0.033934474000	0.008198768000	75.84 %
0.75	0.014231888000	0.001842579000	87.05 %
0.95	0.002550698000	0.000069199760	97.29 %

Tabla 5.6: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 7$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,6$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138560855000	0.050005280000	63.91 %
0.25	0.066728197000	0.020280500000	69.61 %
0.5	0.033944972000	0.007350612000	78.35 %
0.75	0.014222208000	0.001623554000	88.58 %
0.95	0.002551499000	0.000060430860	97.63 %

Tabla 5.7: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,7$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138601297000	0.046501910000	66.45 %
0.25	0.066748484000	0.018491530000	72.30 %
0.5	0.033922118000	0.006569087000	80.63 %
0.75	0.014226653000	0.001431963000	89.93 %
0.95	0.002552302000	0.000052764440	97.93 %

Tabla 5.8: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,8$ .

Percentil	$S(t)$	$\hat{S}^*(t)_{nuevo}$	CP
0.05	0.138641750000	0.043187750000	68.85 %
0.25	0.066704318000	0.016803220000	74.81 %
0.5	0.033932612000	0.005871062000	82.70 %
0.75	0.014231099000	0.001261999000	91.13 %
0.95	0.002550555000	0.000045972870	98.20 %

Tabla 5.9: Cambio Porcentual para  $S(t)_{(nuevo)}$  y  $\hat{S}^*(t)_{nuevo}$  para tiempos de falla logísticos con parámetros  $\mu_1 = 3$  ,  $\mu_2 = 7$  ,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $\rho = 0,9$ .

Los resultados observados en las tablas de la 3.7 a la 3.15, nos muestran un cambio porcentual importante, que toma valores desde el 45 % hasta el 98 %, lo que indica que el estimador  $\hat{S}^*(t)$ , no tiene la propiedad de invarianza, esto sugiere que aunque en los escenarios estudiados, el efecto de la dependencia en la función de confiabilidad, no se aprecie tan grande, no es apropiado generalizar estos resultados, puesto que estos resultados podrían estar afectados por las características del estimador; conclusiones similares son sugeridas por autores como Meeker y Escobar, que indican que debe darse gran importancia a usar una adecuada correlación en aplicaciones con varios modos de falla [9].

## CAPÍTULO 6

---

### Conclusiones

---

Para los casos estudiados de las distribuciones Gamma y logística Bivariada, se puede observar que  $\hat{S}^*(t)$ , es un estimador relativamente robusto de  $S(t)$ , respecto al supuesto de independencia. Luego, aunque exista dependencia entre los dos modos de falla, se tiene que el supuesto clásico de independencia de la metodología tradicional no genera errores significativos en la estimación de confiabilidad del tiempo mínimo.

El estimador  $\hat{S}^*(t)$  de Manotas et al, no es de máxima verosimilitud, puesto que la propiedad de invarianza no cumple.

El estimador  $\hat{S}^*(t)$ , resulta muy inapropiado para predecir, y solo sería adecuado utilizarlo para estimar la confiabilidad del sistema.

Para los casos estudiados de la distribución Gamma bivariada de McKay, la alternativa tradicional de asumir independencia entre las variables, para poder calcular las

estimaciones de la función de confiabilidad, resulta apropiada, puesto que aunque el investigador puede estar en cada caso sobreestimando o subestimando el verdadero valor de la función de confiabilidad, se observó que en los escenarios en los que la dependencia de las variables es muy alta, este error en la estimación de la función de confiabilidad no es muy grande.

En los casos estudiados para la distribución logística bivariada de Gumbel, los resultados del estudio nos muestran que asumir independencia, para el cálculo de la función de confiabilidad, en variables que no son independientes, genera un error en la estimación de la función de confiabilidad verdadera, pero esta desviación no es apreciable, lo que indica que asumir independencia entre las distribuciones marginales cuando no se conoce el grado de dependencia entre las variables resulta ser una buena alternativa.

---

## Bibliografía

---

- [1] Alcalde, F.(2005). La Teoría de los eventos Extremos, aplicación para la evaluación de riesgos. Universidad de Buenos Aires.
- [2] Gupta, A.& Nadarajah, S. (2006). Sums, Products and Ratios for McKays Bivariate Gamma Distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol 43, 185-193.
- [3] Jaramillo, M., Lopera, C., Manotas, E. & Yáñez, S. (2008). Generación de tiempos de falla dependientes Weibull bivariados usando copulas. *Revista Colombiana de Estadística*, Vol 31, 169-181.
- [4] Kotz, J. Balakrishnan, N. & Johnson, L. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*. John Wiley & Sons.
- [5] Lingappaiah, G. (1984). Bivariate Gamma Distribution as a life Test Model. *Applications of Mathematics*, Vol 29, 182-188.
- [6] Manotas, E. Yáñez, S. Lopera, C. & Jaramillo, M.(2008). El Efecto de la Dependencia Entre Tiempos de Falla en la Estimación de la Confiabilidad de un Sistema con dos Modos de Falla Concurrentes. *Dyna*, Vol 75, 29-38.



- 
- [7] McKay, A. (1934). Sampling from Batches, *Supplement to the Journal of the Royal Statical Society*, Vol 1, 207-216.
  - [8] Meeker,W. & Escobar,L. (1998). *Statical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons.
  - [9] Meeker,W. & Escobar,L. (2009). Using Accelerated life Test Results to Predict Product Field Reliability. *Technometrics*, Vol 51, 146-161.
  - [10] Nadarajah, S. & Gupta, A.(2006). Some Bivariate Gamma Distributions. *Applied Mathematics Letters*, Vol 19, 767-774.
  - [11] Nadarajah, S. (2004). Reliability for Some Bivariate Gamma Distributions. *Mathematical Problems in Engineering* , Vol 2005, 151-163.

## APÉNDICE A

---

Estimación de la función de confiabilidad, para la distribución  
Gamma Bivariada de McKay

---

### Distribución Gamma Bivariada de McKay

Función de densidad bivariada:

$$f(t_1, t_2) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_2 dt_1, \quad 0 < t_1 < t_2 < \infty$$

Cálculo de la función de confiabilidad bajo dependencia

$$P(T_1 > t, T_2 > t) = \int_t^\infty \int_{t_1}^\infty \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_2 dt_1$$

tomando

$$u = t_2 - t_1, \quad du = dt_2, \quad \text{ademas } t_2 > t_1 \Rightarrow t_2 - t_1 > 0 \Rightarrow u > 0, \quad t_2 \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty, \quad t_2 = u + t_1$$

Así,

$$\int_{t_1}^{\infty} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_2 = \int_0^{\infty} u^{q-1} e^{-(u+t_1)} du = e^{-at_1} \int_0^{\infty} u^{q-1} e^{-au} du$$

Sea

$$m = au, \quad u = m/a, \quad dm = a du \Rightarrow \frac{dm}{a} = du, \quad u > 0 \Rightarrow m = au > 0, \quad u \rightarrow \infty \Rightarrow m = au \rightarrow \infty$$

Así,

$$\int_{t_1}^{\infty} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt = e^{-at_1} \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{a}\right)^{q-1} e^{-m \frac{1}{a}} \frac{1}{a} dm = \frac{e^{-at_1}}{a^q} \int_0^{\infty} m^{q-1} e^{-m} dm = \frac{e^{-at_1}}{a^q} \Gamma(q)$$

luego,

$$\begin{aligned} P(T_1 > t, T_2 > t) &= \int_t^{\infty} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} \frac{e^{-at_1}}{a^q} \Gamma(q) dt_1 = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_t^{\infty} t_1^{p-1} e^{-at_1} dt_1 \\ &= \frac{a^p}{\Gamma(p)} \left\{ \int_0^{\infty} t_1^{p-1} e^{-at_1} dt_1 - \int_0^t t_1^{p-1} e^{-at_1} dt_1 \right\} \end{aligned}$$

tomando  $m = at_1 \Rightarrow t_1 = m/a$ ,  $dm = a dt_1 \Rightarrow \frac{dm}{a} = dt_1$ , entonces

$$\int_0^{+\infty} t_1^{p-1} dt_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{a}\right)^{p-1} e^{-m \frac{1}{a}} \frac{1}{a} dm = \frac{1}{a^p} \int_0^{+\infty} m^{p-1} e^{-m} dm = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

Así,

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \left\{ \frac{\Gamma(p)}{a^p} - \int_0^t t_1^{p-1} e^{-at_1} dt_1 \right\} = 1 - \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_0^t t_1^{p-1} e^{-at_1} dt_1$$

Por ultimo tomando  $m = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{m}{a}$ ,  $\frac{1}{a} dm = dt_1$ ,  $m > 0$ ,  $t_1 \rightarrow t$ ,  $m \rightarrow at$

Entonces:

$$P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_0^{at} \left(\frac{m}{a}\right)^{p-1} e^{-m \frac{1}{a}} \frac{1}{a} dm = 1 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{at} m^{p-1} e^{-m} dm$$

$$S(t/a, p) = 1 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{at} m^{p-1} e^{-m} dm.$$

Observe que  $S(t/a, p)$  es la función de confiabilidad de  $m = at_1$ , donde  $m$  tiene distribución gamma con parámetro de forma  $\alpha = p$  y parámetro de escala  $\beta = 1$ .

## APÉNDICE B

---

### Cálculo de la función de confiabilidad bajo independencia

---

$$P(T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t) P(T_2 > t)$$

Hallemos las marginales de  $T_1$  y  $T_2$ ,

$$\begin{aligned} f_{T_1}(t_1) &= \int_{t_1}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_2 = \int_{t_1}^{\infty} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_2 = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} \frac{e^{-at_1}}{a^q} \Gamma(q) \\ &= \frac{a^p t_1^{p-1} e^{-at_1}}{\Gamma(p)} \end{aligned}$$

entonces  $T_1 \sim \text{gamma}(p, a)$

$$\begin{aligned} f_{T_2}(t_2) &= \int_0^{t_2} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} e^{-at_2} dt_1 = \frac{a^{p+q} e^{-at_2}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{t_2} t_1^{p-1} (t_2 - t_1)^{q-1} dt_1 \\ &= \frac{a^{p+q} e^{-at_2}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{t_2} t_1^{p-1} t_2^{q-1} \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{q-1} dt_1 = \frac{a^{p+q} e^{-at_2}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_2^{p+q-2} \int_0^{t_2} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{q-1} dt_1 \end{aligned}$$

Tomando

$$u = \frac{t_1}{t_2}, \quad t_2 du = dt_1$$

$$\begin{aligned} f_{T_2}(t_2) &= \frac{a^{p+q} e^{-at_2}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_2^{p+q-2} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} t_2 du = \frac{a^{p+q} e^{-at_2}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t_2^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-at_2} t_2^{p+q-1} \beta(p, q) = \frac{a^{p+q} e^{-at_2} t_2^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_2 \sim \text{gamma}(p+q, a)$$

Así,

$$S^*(t \mid p, q, a) = \Gamma\left(T_1 < t \mid p, \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(T_2 < t \mid p + q, \frac{1}{a}\right).$$

## APÉNDICE C

---

### Función de Confiabilidad con parámetros estimados bajo independencia

---

Tomando a  $\theta$ , el vector de parámetros, como  $\theta = (a, p, q)'$ , la estimación de los parámetros se logra a través de la maximización de:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(t_{1,i}; \theta)]^{\delta_i} [1 - F(t_{2,i}; \theta)]^{1-\delta_i}$$

donde  $\delta_i = 1$  si la  $i$ -ésima observación es una “falla exacta” y 0 si es una censura.

Aquí,

$$f(t_{1,i}; \theta) = \frac{a^p (t_{1,i})^{p-1} e^{-at_{1,i}}}{\Gamma(p)} \text{ y}$$

$$F(t_{2,i}; \theta) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p+q)} \int_0^{t_{2,i}} e^{-au} u^{p+q-1} du.$$

## APÉNDICE D

---

Función de Confiabilidad bajo independencia para la distribución  
Logística Bivariada de Gumbel

---

### Distribución Logística Bivariada de Gumbel

$$G(x_1, x_2) = \exp \left\{ - \left( \left[ e^{-\left\{ \frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1} \right\}} \right]^{1/\gamma} + \left[ e^{-\left\{ \frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2} \right\}} \right]^{1/\gamma} \right)^\gamma \right\}$$

La dependencia se obtiene cuando el limite de  $\gamma$  se aproxima a cero y la independencia cuando  $\gamma$  es uno.

$$\begin{aligned} G(x_i) &= \exp \left\{ -e^{-\left\{ \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}} \right\} \\ \Rightarrow g(x_i) &= \exp \left\{ -e^{-\left\{ \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}} \right\} \left\{ -e^{-\left\{ \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}} \right\} \left\{ -\frac{1}{\psi_i} \right\} \\ &= \frac{1}{\psi_i} e^{-\left\{ \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}} \exp \left\{ -e^{-\left\{ \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}} \right\} \end{aligned}$$

Bajo independencia la estimación de los parámetros de la distribución asociada a los tiempos de falla 1.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(t_1, \theta)]^{\delta_i} [1 - f(t_2, \theta)]^{1-\delta_i} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 < t_2 \\ 0 & \text{si } t_1 > t_2 \end{cases}$$

$$\psi_i = 1 \quad \theta = (\mu_1, \mu_2)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [e^{(t_{1i}-\mu_1)} \exp\{-e^{(t_{1i}-\mu_1)}\}]^{\delta_i} [1 - \exp\{-e^{(t_{2i}-\mu_2)}\}]^{1-\delta_i}$$

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln(e^{(t_{1i}-\mu_1)} \exp\{-e^{(t_{1i}-\mu_1)}\}) + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \ln(1 - \exp\{-e^{(t_{2i}-\mu_2)}\})$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i [-(t_{1i} - \mu_1) - e^{(t_{1i}-\mu_1)}] + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \ln[1 - \exp\{-e^{(t_{2i}-\mu_2)}\}]$$

$$F(t) = P(T_1 < t, T_2 < t) = P(T_1 < t) (T_2 < t)$$



## APÉNDICE E

---

Programa en R para generar las curvas de contorno teóricas de la  
distribución Logística Bivariada

---

```
#####  
La  
%librería evd, permite generar datos de la distribución logística  
%bivariada, la librería contour, permite graficar el contorno de una  
% función previamente definida.  
#####  
  
require(evd)\\  
library("MASS") \\  
library("boot") \\  
library("CircStats")\\  
  
#### Logística Bivariada #####\\
```

```
x <- seq(0, 8, length= 100)\
y <- x
\begin{verbatim}
#####
%f es donde se define la función logística bivariada

#####

f<-function(x,y){exp(-((exp((x-3)))^(1/0.9)+(exp((y-3)))^(1/0.9))~0.9)}

z<-outer(x,y,FUN=f) tmp.mar<- matrix(c(3,3,1,1,0,0),ncol=3)\
m<-rmvevd(100, dep=.9, model = "log", d = 2, mar =tmp.mar )\
#####
% levels=c(0.9,0.95,0.99)le define a contour, cuales curvas de probabilidad
debe graficar

#####
contour(x,y,z,levels=c(0.9,0.95,0.99),ylim=c(0,10),\
xlim=c(0,10),drawlabels=T,xlab="T1",ylab="T2",main="Contornos
teóricos de la distribución Logística bivariada")\
points(m[,1],m[,2],add=T)
```

## APÉNDICE F

---

Programa en R para generar las curvas de contorno teóricas de la  
distribución Gamma Bivariada de McKay

---

```
require(evd)\  
library("MASS")\  
library("boot")\  
library("CircStats")\  
  
#####  
%f es donde se define la función gamma bivariada  
  
#####  
  
x <- seq(0, .5, length= 100)\  
y <- x f <-
```

```
function(x,y){((0.5^(0.3+0.4))/(gamma(0.3)*gamma(0.4)))*
x^(0.3-1)*(y-x)^(0.4-1)*exp(-0.5*y)}\\
z<-outer(x,y,f) \\
gam.biva <- function(a,p,q0,n){ u <- rbeta(n,p,q0)\\
#####
% se generan puntos de la distribución gamma bivariada usando
% como marginales las distribuciones gamma y beta
#####
v <- rgamma(n,shape = p+q0,scale = 1/a) \\
x <- u*v f <-
cbind(t1=x,t2=v) f }\\

#####
%La librería contour, permite graficar el contorno de una
% función previamente definida.
#####

contour(x,y,z,levels=c(0.1,0.3,0.5,0.7,0.9),\\
drawlabels=T,xlab="T1",ylab="T2",\\
main="Contornos teóricos de la distribución gamma bivariada de
McKay")\\
points(gam.biva(0.5,0.3,0.4,100),add=T)
```

## APÉNDICE G

---

Programa en R para la gráfica de la función de densidad de la  
distribución Gamma Bivariada de McKay.

---

```
require(rgl) require(evd)
#####
%la función open3d despliega en R una ventana para
graficar en 3 dimensiones cualquier función.
#####

open3d() x <- seq(0, .5, length= 100) y <-x
f <-function(x,y){((0.8^(.0166+.4166))/(gamma(.0166)*gamma(.4166)))
*x^(.0166-1)*(y-x)^(.4166-1)*exp(-.8*y)} z<-outer(x,y,f)
z=ifelse(is.na(z),0,z) z=ifelse(is.infinite(z),0,z) persp3d(x, y, z,
col = "lightblue",xlab = "X", ylab = "Y",add=TRUE)
```

## APÉNDICE H

---

Programa en R para generar la gráfica de la función de densidad  
de la distribución Logística Bivariada.

---

```
require(rgl)
require(evd)
open3d() x <- seq(0, 8, length= 100)
y <-
x f <- function(x,y){exp( -( (exp(x-7))^(1/.2) +(exp(y-7))^(1/.2)
)^.2)} z<-outer(x,y,f) m<-rmvevd(100, dep=.2, model = "log", d = 2,
mar = matrix(c(7,7,1,1,0,0),ncol=3)) p<-outer(m[,1],m[,2],f)
plot3d(m[,1],m[,2], p) persp3d(x, y, z, col = "lightblue",xlab =
"X", ylab = "Y",add=TRUE)
```

## APÉNDICE I

---

Programa en R para generar los intervalos de confianza bootstrap  
de la distribución Logística Bivariada.

---

```
#####  
%rmeved genera datos de la distribución logística bivariada.  
%mu1 introduce los parámetros de la distribución logística  
#####  
  
IC=function(mu,dep) {require(evd) muestra = function(){ L <-  
function(w){ mu1 = matrix(c(3,7,1,1,0,0),ncol=3) n=50 x <- rmvevd(n,  
dep=0.01, model = "log", d = 2, mar = matrix(c(3,7,1,1,0,0),ncol=3))  
# c(mu1,1,0)) delta <- ifelse(x[,1]<=x[,2],1,0) mua <- w[1] mub <-  
w[1] sum(delta*(-exp(-(x[,1]-mua)))+(x[,1]-mua))) -  
sum((1-delta)*log(1-exp(-exp(-(x[,2]-mub))))) }  
  
#####  
%nlimb estima los parámetros de una distribución logística
```

```
%bivariada, mediante los datos de una muestra.

#####

muest=nlminb(c(3,7),L)$par list("muest" = muest) }

perc <- seq(0,10,.001) p = c(.05,.25,.5,.75,.95) tp = S.t = 0

Stx.est = 0
Stx=matrix(0,1000,5)

Tiempo=array(0,dim=c(10000,3,5))

for(j in 1:length(p)){ si = 0 for(i in 1:length(perc)){ si[i] =
ifelse(pmvvd(c(perc[i],perc[i]), dep, model = "log", d = 2, mar =
matrix(c(mu[1],mu[2],1,1,0,0),ncol=3), lower.tail =
T)<=p[j],perc[i],0) } tp[j] = max(si)

### Número de muestras a tomar###

S = Stxx = 0 simul = 1000 for(k in 1:simul) { muest =
muestra()$muest
Stxx[k]=(1-exp(-exp(-(tp[j]-muest[1]))))* (1-exp(-exp(-(tp[j]-muest[2]))))
Tiempo[k,,j]=c(tp[j],muest[1],muest[2]) } Stx[,j]=Stxx Stx.est[j] =
mean(Stxx) }

list("percentiles .05 - .95" = tp, "Confiabilidad estimada" =
Stx.est,"Stxx"=Stx,"Tiempos"=Tiempo) }

mu=matrix(c(3,7,1,1,0,0),ncol=3) www=IC(mu,dep=0.01)

Resul=cbind(www$Tiempo[1,1,],
```



```
t(as.matrix(apply(www$Stx,2,quantile,c(0.05,0.95)))),as.matrix(apply(www$Stx,2,mean)))
#####
%lines permite unir con lineas los valores obtenidos en cada
percentil
#####
plot(Resul[,1],Resul[,4],ylim=c(0,1),xlab="Percentil de Tiempo
minimo t_p",ylab="Proporción de unidades que no han fallado")
points(Resul[,1],Resul[,2],pch=22)
points(Resul[,1],Resul[,3],pch=24) lines(Resul[,1],Resul[,4])
lines(Resul[,1],Resul[,2],lty=3) lines(Resul[,1],Resul[,3],lty=3)
legend(4.5,0.8,c("S'(t)","LI.S'(t)","LS.S'(t)"),pch=c(21,22,24))

win.graph()

boxplot(www$Stx,names=www$Tiempo[1,1,],ylab="Proporción de unidades
que no han fallado",xlab="Percentil de Tiempo minimo t_p")
```

## APÉNDICE J

---

Programa en R para generar los intervalos de confianza bootstrap  
de la distribución gamma Bivariada.

---

```
gam.biva <- function(a,p,q0,n){  
#####  
%algoritmo de Kotz y Balakrishnan, marginales beta y gama, para  
%generar la gamma bivariada de Mckay  
  
#####  
  
u <- rbeta(n,p,q0)  
  
v<-rgamma(n,shape = p+q0,scale = 1/a)  
  
x <- u*v f <- cbind(t1=x,t2=v) f }
```

```
#####

St.sim <- function(a.p.q) { a <- a.p.q[1] p <- a.p.q[2]
q.<-a.p.q[3]
t0 <- qgamma(c(.05,.25,.5,.75,.95), shape = a.p.q[2],
scale =
1/a.p.q[1]) St <- Stx <-
Cp <- 0 for(j in 1:length(t0)){ St[j] <- 1
- pgamma(a*t0[j],shape=p,1) Stx[j] <- (1 -
pgamma(t0[j],shape=p,1/a))*(1 - pgamma(t0[j],shape=(p+q.),1/a)) }

list("St"=St,"Stx"=Stx) }

#####

%parámetros de la distribución gamma bivariada de Mckay

#####

a <- 2
q. <- .5
r <- .7
p <- (r^2/(1-r^2))*q. a.p.q <- c(a,p,q.)
St<- St.sim(a.p.q)

per <- c(.05,.25,.50,.75,.95) Stxx=matrix(0,1000,5)

Tiem=matrix(0,1000,5) for(k in 1:5){ Stx2 <- 0 Tim <- 0

for(i in 1:1000){ t1 <- gam.biva(a,(r^2/(1-r^2))*q.,q.,50)[,1]

LM1 <- function(x){ a <- 2 q. <- .5 r <- .7 p <- (r^2/(1-r^2))*q. t1
```

```

<- gam.biva(a,(r^2/(1-r^2))*q.,q.,50)[,1]
a <- x[1]
p <- x[2]
n <- length(t1)-(n*p*log(a)-n*log(gamma(p))+(p-1)*sum(log(t1))-a*sum(t1))

}
#####
%estima los parámetros de la distribución gamma bivariada de Mckay,
%a partir de los datos de una muestra.

#####
b=optim(par=c(2,0.5),

fn=LM1) aest <- b$par[1] pest <- b$par[2] qest <- pest*(1-r^2)/r^2

t0 <- qgamma(per[k],shape = p,scale = 1/a)
#####
%Stx2 calcula la función de confiabilidad usando parámetros estimados
#####
Stx2[i] <- (1 - pgamma(t0[1],shape=pest,1/aest))*(1 -
pgamma(t0[1],shape=(pest+qest),1/aest))

Tim[i]=t0[1]

} Stxx[,k]=Stx2 Tiem[,k]=Tim #Stx2 }

apply(Stxx,2,quantile,c(0.05,0.95)) apply(Stxx,2,mean)

```

```
t0=qgamma(per,shape = p,scale = 1/a)

Resul=cbind(t0,t(as.matrix(apply(Stxx,2,quantile,c(0.05,0.95)))),
as.matrix(apply(Stxx,2,mean)))
plot(Resul[,1],Resul[,4],ylim=c(0,1),xlab="Percentil de Tiempo
minimo t_p",ylab="Proporción de unidades que no han fallado")
points(Resul[,1],Resul[,2],pch=22)
points(Resul[,1],Resul[,3],pch=24) lines(Resul[,1],Resul[,4])
lines(Resul[,1],Resul[,2],lty=3) lines(Resul[,1],Resul[,3],lty=3)
legend(1.5,0.7,c("S'(t)", "LI.S'(t)", "LS.S'(t)"),pch=c(21,22,24))

#####
%win.graph() le permite a R generar almismo tiempo los graficos de
%las bandas y de los boxplot
#####
win.graph()

boxplot(Stxx,names= round(t0,4),ylab="Proporción de unidades que no
han fallado",xlab="Percentil de Tiempo minimo t_p")
```

## APÉNDICE K

---

Programa en R para multiplicar los parámetros de la distribución  
Logística Bivariada.

---

```
####ECM = function(mu,dep)#####\\
multi1 =3 multi2 =3 mu =
matrix(c(multi1*3,multi2*7,1,1,0,0),ncol=3) dep=.9 \\

require(evd)\\

muestra = function(mu1,n)\\
{ x <- rmvevd(n, dep=.1, model = "log", d = 2,\\
mar =
matrix(c(mu1[1],mu1[2],1,1,0,0),ncol=3)) # c(mu1,1,0))\\
delta <- ifelse(x[,1]<=x[,2],1,0)\\
L <- function(w){\\
```

```

mua <- w[1]\\
mub <- w[1]\\
sum(delta*(exp(-(x[,1]-mua))+(x[,1]-mua))) -
sum((1-delta)*log(1-exp(-exp(-(x[,2]-mub))))) \\
}
muest = optim(par=c(.1,.1),fn=L)$par \\
list("muest" = muest) \\
}

perc <- seq(0,10,.001) \\
p = c(.05,.25,.5,.75,.95) \\
tp = S.t = 0 \\
Stx.est = ECM = 0 \\
for(j in 1:length(p))
{si = 0 \\
for(i in 1:length(perc)){ si[i] = ifelse(pmvevd(c(perc[i],perc[i]),
dep, model = "log", d =
2, \\
mar = matrix(c(mu[1],mu[2],1,1,0,0),ncol=3), lower.tail =
T)<=p[j],perc[i],0) \\
} tp[j] = max(si)
S.t[j] = 1-pmvevd(c(tp[j],tp[j]), dep, model = "log", d = 2,
matrix(c(mu[1],mu[2],1,1,0,0),ncol=3), lower.tail =
T) \\
S = Stxx = 0
simul = 1 \\
for(k in 1:simul)
{if(multi2==1 & multi2==1) \\
{muest = muestra(mu,50)$muest} \\

```

```
Stxx[k]=(1-exp(-exp(-(tp[j]-multi1*muest[1]))))*  
(1-exp(-exp(-(tp[j]-multi2*muest[2])))) \\  
if(k == 1) S = (S.t[j]-Stxx[k])^2 \\  
if(k > 1) S = S+(S.t[j]-Stxx[k])^2} \\  
  
Stx.est[j] = mean(Stxx) \\  
ECM[j] = S/simul }\\  
  
ACP = sqrt(ECM)/(1-p)*100 \\  
tp  
S.t  
Stx.est  
ECM  
list("percentiles .05 - .95" = tp, "Confiabilidad con  
dependencia" \\  
= S.t, "Confiabilidad estimada" = Stx.est, "ECM" =  
ECM,"ACP"=ACP) #} \\  

```